EXTRAMATERIAL TILL LINJÄR ALGEBRA II

PER ALEXANDERSSON

1. Introduktion

Här är läsanvisningar samt kompletterande uppgifter till kursen *Linjär Algebra II*. Kursboken är *Matrix Theory* av *A. Holst & V. Ufnarovski*. Lösningsförslag till de flesta av problemen finns i slutet. Läsanvisningarna uppdateras och numrering av uppgifter kan ändras, hänvisa därför till problemets namn vid eventuella frågor eller kommentarer. Förslag på förbättringar eller frågor mottages gärna på `per.w.alexandersson@gmail.com`.

2. Matriser sid. 9–27

Första kapitlet behandlar grundläggande notation som vi kommer ha nytta av i resten av kursen. Det är viktigt att du vänjer dig vid hur man hänvisar till element i matriser. Till exempel, vilket index avser rad respektive kolonn?

Vi går också igenom hur blockmatriser fungerar, se till att vänja dig vid dessa genom att göra några av övningarna i slutet av kapitlet.

Sats 1.3, 1.4 och speciellt Sats 1.5 är något du bör lägga tid på att förstå i detalj. I avsnitt 1.8 diskuteras matrisinverser. Se till att du förstår beviset på att högerinversen är samma som vänsterinveren om båda finns. Sats 1.7 säger att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ och är enkelt att bevisa. *Denna identitet är mycket viktig!* Jämför med Sats 1.3.

Vi definierar också *elementära matriser* samt *permutationsmatriser* vars roll visa sig mycket viktiga i nästa föreläsning.

Rekommenderade uppgifter: 1.1-1.15

Problem. 1 (Masha)

Ge i var och en av deluppgifterna nedan exempel på två matriser A och B sådana att

(a) $AB = 0$ men ingen av A eller B är 0.
(b) $AB \neq BA$
(c) $AB = BA$ men $A \neq B$.

Problem. 2 (Marya)

Beräkna följande matrismultiplikationer[1].

$$\begin{pmatrix}1 & i & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & i & 3\\8 & 2 & 5\\-i & 2 & -7\end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix}-1 & i & 3\\8 & 2 & 5\\-i & 2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Problem. 3 (Matriona)

Skriv upp 3×4-matrisen som ges[2] av $(\delta_{ij} + 2i - 3j)$.

Problem. 4 (Marfusha)

Ge exempel på följande typer av matriser: radmatris, kolonnmatris, kvadratisk matris, permutationsmatris, elementär matris, diagonalmatris och nilpotent matris.

Problem. 5 (Angelica)

Beräkna följande produkt

$$M = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 3 & -3\\5 & 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 1\\3 & 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

genom att först transponera båda leden, och sedan utföra en modifierad metod av matrisinvertering. [3]

---

[1] Här är $i = \sqrt{-1}$.

[2] Här är i radindex och j är kolonnindex.

[3] Detta är en tillämpning med modifikation av uppgift 2.10 i *Matrix Theory* av Holst & Ufnarovski.

Problem. 6 (Marina)

Bevisa[4] att $A^n = 0$ om A är en $n \times n$ övertriangulär matris med nollor på huvuddiagonalen.

Problem. 7 (Malvina)

Låt A och B vara nilpotenta [5] matriser som uppfyller att $AB = BA$.

(a) Visa att AB är nilpotent.
(b) Visa att $A + B$ är nilpotent.
(c) Bevisa att $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^l$ är nilpotent, för alla heltal $l > 0$, om A är nilpotent.

3. Gausselimination och LU-uppdelning sid. 31–40

Kapitel 2 introducerar gausselimination, som man bör komma ihåg från tidigare kurs i linjär algebra. Vad som är nytt är att denna process kan tolkas som upprepad matrismultiplikation från vänster, med permutationsmatriser och elementära matriser. Detta ger en så kallade LU-faktorisering, i.e. man kan skriva $PA = LU$ där P är en permutationsmatris, A är matrisen vi faktoriserar, L är en produkt av undertriangulära elementära matriser, och U är en övertriangulär matris. Anledningen till att detta fungerar är att vi väljer P så att vi i gausseliminationen av PA alltid eliminerar nedåt. Detta gör att L blir undertriangulär.

Denna uppdelning gör det enkelt att säga saker om ekvationssystem, och kommer vara till nytta för bevis senare i kursen. Vi definierar också *rangen* av en matris som antalet pivåtelement efter utförd gausselimination. Rangen av en matris hänger samman med inverterbarhet: en $n \times n$-matris måste ha rang n (full rang) för att kunna inverteras.

Observera att man i boken beskriver en speciell ordning i vilken man skall utföra eliminationen för att få en LU-uppdelning; utför man algoritmen i en annan ordning, (genom att till exempel byta plats på flera rader samtidigt) fås samma antal pivotelement i slutet, men troligen

[4]Tips: använd induktion.

[5]Kom ihåg, en matris A är nilpotent om det finns ett heltatl $k > 0$ så att $A^k = 0$

en annan permutationsmatris och då andra L och U. Resultatet kallas fortfarande för en LU-uppdelning, men kanske inte stämmer överens med det som finns i bokens lösningsförslag.

Ekvationssystemet $AX = 0$ där A är $n \times m$ har $\mathrm{rank}(A)$ basvariabler[6], och $m - \mathrm{rank}(A)$ fria variabler (parametrar). Finns inga fria variabler, är lösningen unik. Är lösningen unik, måste kolonnerna i A vara linjärt oberoende.

Viktigt i detta kapitel är alltså hur *rang*, *linjärt oberoende*, antal lösningar till *ekvationssystem* samt *inverterbarhet* hänger samman.

Detta förklaras i satserna 2.4 och 2.5. Från dessa satser kan vi se att en $m \times n$-matris A har vänsterinvers precis om $\mathrm{rank}(A) = n$, och högerinvers precis om $\mathrm{rank}(A) = m$. Matrisen A kan då bara ha (tvåsidig) invers om $m = n$, det vill säga om A är en kvadratisk matris.

Rekommenderade uppgifter 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.7, 2.9, 2.10

Problem. 8 (Rozalina)

Beräkna rangen av följande matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ i & 6 & 8 \\ 1+2i & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

Problem. 9 (Roksana)

LU-uppdela matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 10 (Rostislava)

LU-uppdela matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[6] basic variables, se sid 32

Problem. 11 (Radonia)
LU-uppdela matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 2i \\ -1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Determinanter sid. 43–57

Kapitel 3 härleder alla de egenskaper för determinanter som vi är vana vid från Linjär Algebra I. Vad som är nytt är möjligen att vi nu hela tiden arbetar med $n \times n-$matriser och inte bara 2×2 och 3×3-matriser. I texten utgår man från en rekursiv definition, (utveckling längs med första kolonnen), och från detta härleds ett antal trevliga egenskaper;

(1) Determinanten för en övertriangulär matris, ges av produkten av diagonal-elementen. Detta ger direkt att $|I| = 1$.
(2) Determinanten för A multipliceras med c, om en rad multipliceras med c.
(3) Determinanten byter tecken, om vi byter plats på två rader.
(4) Determinanten för en matris är noll, om två rader är identiska.

Alla dessa egenskaper visas med hjälp av induktion över matrisstorleken. Dessa egenskaper visar att determinanten, sett som en funktion av raderna, är en *multilinjär* funktion. Sats 3.8 visar att determinantfunktionen är den unika funktion som har dessa egenskaper och som är 1 på enhetsmatrisen. Vi kan alltså använda detta som en alternativ definition av determinanten.

Den multilinjära egenskapen visar att en matris determinant är oförändrad under gausselimination av raderna (dvs. subtraktion av multiplar av raderna från varandra), vilket ger en effektiv metod för att faktiskt beräkna determinanten av en matris. Från denna egenskap kan vi också visa att $|AB| = |A||B|$.

Sats 3.10 visar att man kan utveckla längs med godtycklig kolonn, genom att ta hänsyn till vissa tecken. Därefter visar man i Sats 3.12 att

$$|A| = |(a_{ij})| = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

där vi summerar över alla permutationer av talen $1, 2, \ldots, n$. Detta kan ses som en tredje definition av determinantfunktionen. Från detta visas att $|A| = |A^T|$, och alla uttalanden om rader ovan, gäller då också för kolonner, samt att determinant för en undertriangulär matris beräknas på samma sätt som för en övertriangulär.

Slutligen presenters ett par resultat som kopplar samman en matris A, dess adjungerade matris, $\text{adj}(A)$ och dess invers, A^{-1}. Slutsatsen är att determinanten måste vara nollskild för att en matris skall kunna inverteras.

Del 3.8 visar på hur man beräknar några vanligt förekommande determinanter. Detta kan läsas kursivt, men följ gärna beviset på hur Vandermondedeterminanten beräknas, då just denna determinant används ofta.

Det man skall ta med sig från detta kapitel är alltså vilka operationer på matriser som bevarar matrisens determinant, och vilka operationer som förändrar determinanten på ett förutsägbart sätt.

Rekommenderade uppgifter 3.1-3.9, 3.12-3.15 [7]

Problem. 12 (Delina)

Beräkna följande determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[7] Notera att det i upplagan från 2012 skall vara $a_{ij} = 1$ om $i < j - 1$ i uppgift 3.14, och inte ett plustecken. Tips till 3.14, subtrahera näst sista raden från sista raden i matrisen.

Problem. 13 (Denise)
Beräkna följande determinant

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & x^2 & x & x+1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Problem. 14 (Diana)
Beräkna följande determinanter:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 4 & 0 \\ 2 & x-1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \ (b) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ (c) \begin{vmatrix} 100 & 200 & 250 & 101 \\ 100 & 200 & 101 & 102 \\ 101 & 200 & 99 & 101 \\ 99 & 199 & 100 & 102 \end{vmatrix}$$

Problem. 15 (det-2004-01-09:1)
Lös följande ekvation

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problem. 16 (det-2004-03-16:1)
Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 1 & 2 & 4 & 3x \\ 1 & 3 & 9 & 2x \\ 1 & x & x^2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Problem. 17 (det-2003-01-10:2)

Låt n vara godtyckligt positivt heltal. Bestäm alla tal $x \in \mathbb{R}$ så att determinanten nedan blir 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 4-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-x \end{vmatrix}.$$

Problem. 18 (rank-2003-03-18:4)

Bestäm för alla reella a, rangen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 19 (Rebecca)

Bestäm rangen för följande matriser

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -9 & 14 & -4 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 4 & -1 & 14 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Förklara varför du fick samma rang för båda matriserna.

Problem. 20 (Darya)

Visa att $|cA| = c^n|A|$ om A har storlek $n \times n$.

Problem. 21 (Dominika)

Utgå ifrån den rekursiva definitionen[8] av determinanten och visa att $|A| = |A^T|$ för kvadratiska matriser, genom att först visa[9] följande delresultat:

(a) att determinanten för en *övertriangulär* matris är produkten av diagonalelementen.
(b) att determinanten för en matris med översta raden bara nollor, har determinant noll.
(c) att determinanten för en *undertriangulär* matris är produkten av diagonalelementen.
(d) att determinanten för en permutationsmatris är ± 1.
(e) Visa att $P_\sigma^T = P_{\sigma^{-1}}$.

Slutligen, visa att $|A| = |A^T|$ genom att använda dig av LU-uppdelningen av A och ovanstående delresutat.[10]

Problem. 22 (Rosita)

En kvadratisk matris A sägs vara nilpotent om det finns ett heltal $k > 0$ så att $A^k = 0$.

(a) Finn en matris A av ordning 4×4 som uppfyller att $\operatorname{rank} A = 3$, $\operatorname{rank} A^2 = 2$, $\operatorname{rank} A^3 = 1$ och $\operatorname{rank} A^4 = 0$.
(b) Kan vi konstruera en 4×4-matris B så att $\operatorname{rank} B = 4$ men $\operatorname{rank} B^2 = 3$?

---

[8] Det vill säga, utveckling längs med första kolonnen.

[9] Använd induktion!

[10] Även $|AB| = |A||B|$ behövs.

Problem. 23 (Rosalina)
Matrisen C_n är av ordning $2n \times 2n$ och ges av $(\delta_{ij} + 2\delta_{i,2n-j+1})_{ij}$. Till exempel,

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm ett uttryck för $|C_n|$.

Problem. 24 (Ludmila)
Lös följande problem:

(a) Visa att $|AB^T| = 0$ eller $|B^T A| = 0$ om A, B är matriser med storlek $n \times m$ och $m \neq n$.
(b) Finn matriser, A, B så att $|AB| \neq |BA|$.

5. Vektorrum I sid. 67–74

Vi börjar med att definiera[11] *vektorrum* samt *underrum*[12]. Vi kommer arbeta mest med $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$ men det finns många andra exempel. Vi kommer enbart arbeta med ändligtdimensionella vektorrum, dvs. vektorrum där varje vektor är en *linjärkombination* av ändligt många vektorer. Det visar det sig att alla (ändligtdimensionella) vektorrum över $\mathbb{R}$ (och $\mathbb{C}$) uppför sig på samma sätt, och man kan med hjälp av *koordinater* överföra varje vektorrum till $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) för lämpligt n.

En *bas* för V är en uppsättning *linjärt oberoende* vektorer $v_1, \ldots, v_n$ som spänner upp V. Detta är en mycket viktig definition, och man måste veta både vad linjärt oberoende och spänna upp innebär. Begreppet linjärt oberoende i sig är fundamentalt, och det kommer vi använda mycket.

---

[11] Del 4.1 kan man hoppa över.

[12] Notera att underrum i sig är vektorrum.

Därefter definieras *dimension* för ett vektorrum, vilket är det antal linjärt oberoende vektorer som behövs för att spänna upp vektorrummet [13]. Det visar sig i Sats 4.1 att detta antal är oberoende av de vektorer man väljer.

I del 4.4 beskriver man hur man med hjälp av en *basbytesmatris* översätter koordinater i en bas till koordinater i en annan bas. Observera alltså att vi inte kan tala om koordinater utan att först specifiera vilken bas som vi arbetar med. Många vektorrum kommer med en standardbas, t.ex. $\mathbb{R}^n$ har basen $e_1, \ldots, e_n$ där e_j är vektorn med en etta på position j och övriga element är 0. Vektorrummet (över $\mathbb{R}$) bestående av alla polynom med grad $\leq n$ har standardbasen $1, x, x^2, \ldots, x^n$, Notera att $x + 3x^2$ har koordinaten $(0, 1, 3, 0, \ldots, 0)$ i denna bas. Det är alltså en skillnad mellan *vektorer* och *koordinater för en vektor*, men i $\mathbb{R}^n$ märker vi inte av denna skillnad om vi arbetar i standardbasen; vektorer och dess koordinater *skrivs* på exakt samma sätt.

Viktigast i del 4.5 är beviset för att varje linjärt oberoende mängd vektorer i ett vektorrum V, kan utvidgas så att det blir en bas för hela V.

Rekommenderade uppgifter 4.1, 4.2, 4.4, 4.11

Problem. 25 (Veleriya)

Vektorerna $v_1, \ldots v_r$ ligger i vektorrummet V och är linjärt oberoende. Visa att koordinatvektorer $A_1, \ldots, A_r$ (uttryckta i en bas för V) för $v_1, \ldots, v_r$ är linjärt oberoende.

Problem. 26 (Valentina)

Låt V vara rummet av polynom av grad max 2. Visa att polynomen $1 + x$, $x^2 - 1$ och $2x$ utgör en bas i detta rum, och bestäm koordinaterna för polynomet $x^2 + 3x + 2$ i denna bas.

[13]Dimensionen är således antalet basvektorer som krävs för att spänna upp rummet

Problem. 27 (Victoria)

Betrakta mängden V av vektorer (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller att $x + y + z = 0$. Visa att V är ett vektorrum, samt bestäm en bas och dimension för detta rum.

Problem. 28 (Viola)

Låt V vara mängden av reella 2×3-matriser på formen $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ -b & a & c \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Visa att V är ett delvektorrum till rummet av 2×3-matriser.
(b) Finn en bas och dimension för V.
(c) Bestäm koordinaterna för matrisen $\left(\begin{smallmatrix} 2 & \pi & 42 \\ -\pi & 2 & 42 \end{smallmatrix}\right)$ i den bas du fann i (b).

6. Vektorrum II sid. 75–81

Kapitlet om vektorrum fortsätter med att definiera *linjära höljet* av en mängd vektorer i ett vektorrum V, betecknas $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Detta är alltid ett underrum till V. Sidan 74 beskriver en metod för att hitta en bas för det linjära höljet till en mängd vektorer.

Vi definierar sedan $U \cap W$ samt $U + W$, som är delvektorrum till V om $U, W \subseteq V$. Det visar sig att $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$.

Om $U \cap V = 0$, så skriver vi $U + V$ som $U \oplus V$. Varje vektor $w \in U \oplus V$ kan då *unikt* skrivas som $w = u + v$ med $u \in U$ och $v \in V$, och en bas för $U \oplus V$ ges som t.ex. unionen av baserna för U och V.

Kapitel 4.7 är mycket viktigt, här beskrivs algoritmer för hur man finner en bas för de vektorer $X \in \mathbb{K}^n$ så att $AX = 0$. Detta vektorrum betecknas $\ker A$, utläses *kärnan* eller *nollrummet* för matrisen A. Metoden innebär i praktiken att man löser ett linjärt ekvationssystem.

Algoritm[14] 4.2 och 4.3 ger metoder för hur man hittar en bas för det vektorrum som raderna i en matris spänner upp, respektive det vektorrum som kolonnerna spänner upp. Det senare vektorrummet betecknas $\operatorname{Im} A$ och utläses *bilden av* A, eller *värderummet till* A.

Slutligen ges algoritmer för att finna baser för $U + W$ och $U \cap W$. Metoden för den senare beräkningen är ganska invecklad, i många

[14] Dessa algoritmer är mycket viktiga att behärska!

sammanhang kan man utnyttja andra metoder. Till exempel, om vi vill finna en bas för $\ker A \cap \ker B$ räcker[15] det att finna en bas för $\ker C$, där C är blockmatrisen $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$.

Sammanfattningsvis, giveten matris A finns det fyra (egentligen tre) vanliga delrum man är intresserade av att beräkna:

(1) $\ker A$, kärnan av A, nollrummet till A.
(2) $\operatorname{Im} A$, bilden av A, värderummet till A.
(3) Radrummet till A, det vektorrum raderna spänner upp.
(4) Kolonnrummet till A, det vektorrum kolonnerna spänner upp.

Kolonnrummet och $\operatorname{Im} A$ är samma vektorrum.

Vi löser ekvationssystemet $AX = 0$. Lösningarna kan parametriseras som $X = t_1V_1 + t_2V_2 + \dots t_kV_k$, och $V_1, \dots, V_k$ är en bas för $\ker A$. De rader med pivotelement efter gausselimination spänner upp radrummet. De kolonner med pivotelement *i ursprungliga matrisen* A ger en bas för kolonnrummet.

Rekommenderade uppgifter 4.3, 4.5-4.8, 4.10, 4.12

Problem. 29 (Vilma)

Vilka av följande delmängder till $\mathbb{R}^3$ är vektorrum?

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y\}$
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0$ och $y + z = 0\}$

Problem. 30 (Pamela)

Visa att polynomen $1, x + 1$ och $x^2 + x + 1$ är en bas för mängden av polynom av grad maximalt 2, och bestäm koordinaterna för ett godtycklig polynom $c_1 + c_2x + c_3x^2$ i denna bas.

Problem. 31 (Petronella)

Visa att mängden V av polynom med reella koefficienter och grad maximalt 3 är ett vektorrum. Visa att mängden U av polynom i V som

[15] Fundera på varför detta är sant!

uppfyller att $p(0) = 0$ är ett delvektorrum till V. Finn en bas för U och utvidga till en bas för V.

Problem. 32 (Vanessa)

Mängden V av reella $2 \times 2-$matriser är ett vektorrum. Visa att matriser $A \in V$ som uppfyller $BA = 0$ är ett delvektorrum, där matrisen $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Bestäm en bas och dimension för detta delrum.

Problem. 33 (Vendela)

Bestäm en bas för radrummet, nollrummet och värderummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problem. 34 (Beatrice)

Bestäm en bas för kolonnrummet och radrummet till var och en av matriserna nedan. Bestäm också baser för nollrummet och värderummet till de linjära avbildningar vars matriser i standardbasen ges av matriserna. Slutligen bestäm rangen av var och en av matriserna.

(a) (2003-08-15:2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2004-10-19:1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 6 & 12 & -3 \\ -2 & 6 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

(c) (2005-01-11:1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Problem. 35 (Vasilisa)

Bestäm en bas för nollrummet, värderummet samt radrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem. 36 (Bella)

Bestäm en bas för det linjära rum U som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 2)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, 3, -7)$, och $(7, 2, 8)$ genom att beräkna en bas för

(a) radrummet
(b) kolonnrummet

till en lämplig matris.

Problem. 37 (Bianca)

Vektorerna $(1, 3, -1, -1)$ och $(0, 2, 1, 2)$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$. Utvidga dessa vektorer till en bas för $\mathbb{R}^4$.

Problem. 38 (Belinda)

Vektorrummet $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av det linjära höljet av $(1, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$ och $(3, 2, 1)$. Vektorrummet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av det linjära höljet av $(-1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ och $(2, 3, 5)$. Bestäm en bas för $U + V$ och $U \cap V$.

Problem. 39 (Betty)

Finn en bas för $U + V$ och $U \cap V$ där U och V ges av

(a) $U = \langle (1, 0, 1), (1, 2, 1) \rangle$, $V = \langle (1, 0, 4), (1, 0, -4) \rangle$ i $\mathbb{R}^3$.
(b) $U = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$, $V = \langle (1, 0, 4, 0), (3, 0, -4, 1) \rangle$ i $\mathbb{R}^4$.

(c)

$$\begin{aligned}U &= \langle (1,2,-1,-2),(4,-3,1,2),(11,0,-1,-2)\rangle,\\ V &= \langle (3,-5,2,4),(10,-13,5,10)\rangle\end{aligned}$$

som delrum i $\mathbb{R}^4$.

(d) $U = \langle (1,0,1),(0,1,2)\rangle$, $V = \langle (1,0,0)\rangle$ i $\mathbb{R}^3$.

Problem. 40 (Barbro)

Bestäm en samling vektorer från M som utgör en bas för det linjära rum som spänns upp av vektorerna i M, där M ges av

(a) $M = \{(1,0,1),(-1,0,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$, i $\mathbb{R}^3$.
(b) $M = \{1+x+x^2, 2-x-2x^2, x+2, 2x^2-3\}$, i $P_2(\mathbb{R})$.
(c) $M = \{(1,1,1,1),(2,1,2,1),(1,2,1,2),(-100,0,-100,0)\}$, i $\mathbb{R}^4$
(d) $M = \{x^2+2x+3, x+1, x^2+1, 2x^2+3x+5, 2x-2x^2, x^2+x\}$, i $P_2(\mathbb{R})$.

Problem. 41 (Adele)

Låt kolonnerna i matrisen A utgöra en bas för ett delrum $U \subseteq V$. Notera att vi då har att $\dim U = \operatorname{rank} A$. Antag att kolonnerna i matrisen B är linjärt oberoende, och att $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$.

(a) Visa att kolonnerna i B också är en bas för U om $\operatorname{rank}(A\ B) = \operatorname{rank} A$, där $(A\ B)$ är matrisen som består av både A:s och B:s kolonner.
(b) Använd metoden ovan för att avgöra om vektorerna

$$(1,2,-1,0),\ (-1,3,2,2) \text{ och } (3,2,-2,1)$$

är en bas för samma rum som vektorerna

$$(4,1,0,5),\ (3,-1,1,5),\ \text{och } (7,-6,7,18)$$

spänner upp.

7. Linjära avbildningar I sid. 85–91

Låt säga att vi har två vektorrum, V och U, båda över samma kropp[16] $\mathbb{K}$. En avbildning $T\colon V \to U$ sägs då vara *linjär* om $T(\mathbf{v}_1 + v_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$ och $T(\lambda \mathbf{v}_1) = \lambda T(\mathbf{v}_1)$ för alla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ och $\lambda \in \mathbb{K}$. Det senare kravet kräver faktiskt att vi kan multiplicera vektorer med λ både i V och U! Ett speciellt fall är om $V = U$ och vi har en linjär avbildning $T\colon V \to V$. Då säger vi att T är en *linjär operator*.

Om vi nu har en bas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$ och en linjär avbildning $T\colon V \to U$ så gäller

$$T(\mathbf{v}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är koordinaterna för vektorn $\mathbf{v}$ i basen $\mathbf{e}$. Slutsansen är att det räcker att veta om $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ för att kunna beräkna godtyckligt $T(\mathbf{v})$. Om $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ är en bas i U finns det tal a_{ij} så att

$$T(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \ldots + a_{mj}\mathbf{f}_m.$$

Matrisen $A = (a_{ij})$ kallas för *avbildningsmatrisen* till T i baserna $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$. En bra minnesregel är att *kolonnerna i A är bilden av basvektorerna*, vilket betyder att kolonn j i A är koordinaterna (i basen $\mathbf{f}$) för $T(\mathbf{e}_j)$.

Det viktiga här är alltså att så fort vi fixerat baser i V och U kan vi glömma bort T och enbart arbeta med matrisen A. Sammansättning av linjära avbildningar översätts till matrismultiplikation. Man bör dock komma ihåg att det är en subtil, men viktig skillnad mellan T och A. Man kan se T som en summa pengar, och A är motsvarande summa i en viss valuta. Summan är densamma, oavsett valuta, och olika valutor kan representera samma summa.

Sats 5.1[17] säger att om T är en linjär operator på vektorrummet V med matrisen $A_\mathbf{e}$ i basen $\mathbf{e}$, och basen $A_\mathbf{f}$ i basen $\mathbf{f}$, så gäller det att $A_\mathbf{f} = S^{-1}A_\mathbf{e}S$ där S är basbytesmatrisen från basen $\mathbf{f}$ till $\mathbf{e}$.

Vi säger att två kvadratiska matriser A, B är *similära* om $B = S^{-1}AS$ för någon basbytesmatris S. Två matriser är alltså similära om och

[16] Detta innebär att de skalärer vi får multiplicera med är samma i de båda vektorrummen.

[17] Detta är en mycket viktig sats!

endast om de representerar *samma* linjära operator uttryckta i olika baser.

En linjär operator är inverterbar om och endast om motsvarande avbildningsmatris[18] är inverterbar.

Rekommenderade uppgifter 5.1-5.10, 5.12

Problem. 42 (Lidiya)

Låt T vara en linjär avbildning från V till U där $\dim V = 5$ och $\dim U = 6$. Vilken storlek har en matris som representerar T (i något val av baser)?

Problem. 43 (Linnea)

Betrakta den linjära avbildningen T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, x + y + z).$$

Bestäm avbildningsmatrisen för T uttryckt i standardbaserna för respektive vektorrum. Är T injektiv eller surjektiv?

Problem. 44 (Lejla)

Bestäm bilden av 1, x och x^2 under följande linjära avbildningar:

(a) $p(x) \mapsto p'(x)$
(b) $p(x) \mapsto p(x-1)$
(c) $p(x) \mapsto 3p(2x)$
(d) $p(x) \mapsto xp'(x)$

Problem. 45 (Lizette)

Betrakta rummet av polynom av grad maximalt 2, och den linjära avbildningen $T : p(x) \mapsto -p(x-1)$ som verkar på detta linjära rum. Bestäm avbildningsmatrisen för T i basen $1, x, x^2$.

Problem. 46 (Lilly)

Bestäm avbildningsmatrisen, en bas och dimension för $\ker F$, en bas och dimension för $\operatorname{Im} F$ samt rangen av den linjära avbildningen F

[18]Efter något val av bas

som definieras i var och en av deluppgifterna nedan. Avgör också om avbildningen är något av injektiv, surjektiv eller bijektiv.

(a) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ där

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ a-b & a-d \end{pmatrix}$$

med basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ samt } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ med

$$F(1) = x^3 + 1, \quad F(x+1) = x^2 - 1 \text{ och } F(x^2+1) = x - 1,$$

i baserna $\{1, x+1, x^2+1\}$ resp. $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) $F : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ där $F(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2$, med resp. standardbas.

(d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ där $F(a, b) = a + ib$ med baserna $\{(1, 0), (0, 1)\}$ respektive $\{1, i\}$.

Problem. 47 (Liona)

Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definieras som

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 2x + z, x - 3z).$$

Bestäm en bas för T:s nollrum resp. värderum.

Problem. 48 (Lykke)

Bestäm en bas för $\ker A$, $\operatorname{Im} A$ och radrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Del 5.4 börjar med att observera att om vi har ett delrum $W \subseteq V$ och $T\colon V \to U$ så är $TW := \{T(w) | w \in W\}$ ett delrum till U. Speciellt är TV ett delrum, och detta betecknas $\operatorname{Im} T$. Detta kallas för avbildningen T:s *bildrum*, eller *värderum*. Liknande visas att de vektorer i V som avbildas på nollvektorn är ett delrum i V och betecknas $\ker V$. Detta kallas för T:s *nollrum* eller *kärna*.

Sats 5.5 är sedan en bra sats som ger en massa ekvivalenta definitioner på rangen av en matris eller avbildning.

Sats 5.8 är en av de viktigaste satserna i kapitlet, som visar att

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

om $T\colon V \to U$ är en linjär avbildning.

Slutligen i Sats 5.13 ger man ekvivalenta förutsättningar för att en avbildning skall vara *injektiv* eller *surjektiv*, vilket är mycket centrala begrepp. Dessa skall man känna igen[19] sedan tidigare, när man talat om allmäna funktioner.

Sammanfattningsvis, kapitlet arbetar mycket med hur dimensionerna för vektorrum och delrum samspelar med speciella delrum som fås från linjära avbildningar. Bara genom att veta dimensionen för nollrummet till en avbildning kan man säga ganska mycket om avbildningen.

Exempelvis, $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ måste ha en kärna som har minst dimension ett, $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}^4$ så $\dim \operatorname{Im} T \leq 4$. Då $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 5$ följer det att $\dim \ker T \geq 1$.

Rekommenderade uppgifter 5.1-5.10, 5.12

Problem. 49 (Liliya)

En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller att $\operatorname{rank} T = 3$. Bestäm $\dim \ker T$ och $\dim \operatorname{Im} T$. Kan man lösa ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$? Är lösningen unik?

[19] Fundera på likheterna!

Problem. 50 (Leya)

Bestäm en bas för $\ker T$ och $\operatorname{Im} T$ eller avgör om resp. rum är nolldimensionellt, till den linjära avbildningen $T : P_1(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$ där

$$T(p(x)) = xp(2ix) - p(x).$$

Problem. 51 (Lisen)

En linjär avbildning $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definieras av $T(p(x)) = ((x+1)p(x))''$. Bestäm en bas för nollrummet samt värderummet till den sammansatta avbildningen $T \circ T$. Finns det ett polynom $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$, så att $T(T(p(x)) = x$?

Problem. 52 (Liza)

Låt $V = \{p(x) : \deg p \leq 5\}$ och definiera $T_1, T_2 \colon V \mapsto V$ enligt $T_1(p(x)) = x^5 p(1) + p'(x)$ och $T_2(p(x)) = -5x^4 p(1) + p'(x)$.

(a) Bestäm en bas för V.

(b) Bestäm nollrum och värderum för T_1 och T_2.

Problem. 53 (Liselott)

Låt $V_1 = \mathbb{R}^3, V_2 = \mathbb{R}^3, V_3 = \mathbb{R}^4$. Låt $A : V_1 \mapsto V_2$ och $B : V_2 \mapsto V_3$ vara linjära avbildningar givna av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

i någon bas i respektive vektorrum. Bestäm en bas för nollrum och värderum för A, B samt BA.

Problem. 54 (Linda)

Låt V_1, V_2, V_3 vara vektorrum, och $A : V_1 \mapsto V_2$ en linjär avbildning med 2-dimensionellt nollrum, och 2-dimensionellt värderum. Låt $B : V_2 \mapsto V_3$ vara en linjär avbildning med 3-dimensionellt nollrum och 3-dimensionellt värderum.

(a) Bestäm dimensionerna på vektorrummen V_1 och V_2.

(b) Bestäm möjliga dimensioner på nollrum och värderum för den sammansatta avbildningen $B \circ A : V_1 \mapsto V_3$.

Jämför med problem 53.

Problem. 55 (Linn-Sofia)

Finns det en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller att $F(2,7,3) = (1,0,1)$, $F(-1,-3,1) = (0,3,-1)$ och $F(1,5,9) = (1,4,-1)$?

Problem. 56 (Lucya)

Visa att om A och B är similära, så är A inverterbar om och endast om B är inverterbar.

Problem. 57 (Larisa)

Avgör om matriserna A och B nedan är similära. [20]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Problem. 58 (Lubov)

Visa att operatorn T som avbildar polynomet $p(x)$ på $p(x) + p'(x)$ är en linjär operator i vektorrummet av polynom med reella koefficienter. Är denna avbildning inverterbar om man begränsar graden på polynom till något fixt n?

Problem. 59 (Lada)

Låt $V = U_1 \oplus U_2$ och låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning så att $TU_1 \cap TU_2 = 0$. Visa att $\operatorname{Im} T = TU_1 \oplus TU_2$ om $\dim \ker T = 0$.

[20]Tips: Finns det någom matris S så att $SA = BS$ där S är en basbytesmatris? En matris är en basbytesmatris om dess determinant är skild från 0.

Problem. 60 (Lyubonka)

För att undersöka om en samling funktioner $f_1, \ldots, f_n$ är linjärt oberoende, kan man använda *Wronskianen* W, vilket definieras som determinanten

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Om W inte är identiskt noll, är funktionerna linjärt oberoende, men om W förenklas till 0, är funktionerna linjärt beroende.

Visa att funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och e^{ax} är linjärt beroende precis då $a = \pm i$.

Problem. 61 (Line-Lott)

Låt V vara mängden av alla kontinuerliga funktioner f från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ så att $f(x) > 0$ för alla x. Definiera den binära operationen $\oplus$ på $V \times V \mapsto V$ enligt $f \oplus g = f \cdot g$. Definiera även avbildningen $\otimes$ på $\mathbb{R} \times V \mapsto V$ enligt $\lambda \otimes f = f^\lambda$.

Visa att V tillsammans med $\oplus$ som vektoraddition, och $\otimes$ som multiplikation med skalär bildar ett vektorrum. Avgör därefter vilka av följande avbildningar från V till V som är linjära.

(a) $T(f(x)) = \sqrt{f(x)}$
(b) $T(f(x)) = f(x) + 1$
(c) $T(f(x)) = f(-x)$
(d) $T(f(x)) = f(x)^{x^2-1}$

9. Spektralteori sid. 115–126

Vi säger att en matris A är diagonaliserbar om A är similär med en diagonalmatris. Om A är diagonaliserbar, kan vi enkelt beräkna A^k. Vi har att $A = S^{-1}DS$ för en diagonalmatris D och noterar att $A^k = (S^{-1}DS)^k = S^{-1}D^kS$. Det är lätt att beräkna D^k.

För att finna basbytesmatrisen S till en diagonaliserbar matris så introduceras begreppen *egenvektor* och *egenvärde*. Givet en kvadratisk matris A så är $\mathbf{v} \neq 0$ en egenvektor om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för något $\lambda \in \mathbb{K}$. Här är λ egenvärdet till $\mathbf{v}$. Observera att diagonalmatrisen $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alltid har de n linjärt oberoende egenvektorerna E_i med motsvarande egenvärde λ_i. Således, om A är diagonaliserbar, så måste $A = S^{-1}DS$ också ha n linjärt oberoende egenvektorer, nämligen $S^{-1}E_i$, för $i = 1, 2, \ldots, n$.

Diagonalisering av A kräver alltså att vi hittar A:s egenvektorer. Nu, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ger att $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ och detta går att lösa för $\mathbf{v} \neq 0$ bara om $|A - \lambda I| = 0$. Vi definierar A:s karakteristiska polynom [21], $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ och rötterna till detta polynom är A:s egenvärden. Från dessa kan man sedan hitta egenvektorer genom att sätta in dessa rötter λ_i i ekvationen $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ och finna $\mathbf{v}$.

Korollarium 6.7 visar att om $A \sim B$ så gäller $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ vilket direkt ger att vi kan tala om en linjär operators egenvärden utan[22] att bestämma en bas.

Notera att inte alla matriser är diagonaliserbara!

Rekommenderade uppgifter 6.1-6.10

Problem. 62 (Eleonora)

Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Problem. 63 (Evelina)

Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

[21]På andra ställen definieras det som $|\lambda I - A|$, men dess rötter är samma

[22]Egenvärdena ges av egenvärdena till operatorns avbildningsmatris i *någon* bas, och är oberoende av val av bas.

Problem. 64 (Emelie)
Bestäm alla egenvärden och bas för motsvarande egenrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 65 (Enya)
Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 66 (Esmeralda)
Beräkna egenvärden och motsvarande egenvektorer till följande matriser:

$$(a) \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Problem. 67 (Embla)
Visa att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inte kan diagonaliseras.

Problem. 68 (Ester)

Bestäm en matris B så att
$$B^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problem. 69 (Elvira)

På ett universitet så studeras två ämnen, teoretisk fysik och virkning. Varje år, så börjar 20% av de som är sysslolösa med teoretisk fysik, och 20% av de som studerar teoretisk fysik byter till virkning. Slutligen, av de som virkar, byter 30% av studenterna till teoretisk fysik. Övriga personer fortsätter med samma syssla som de hade tidigare.

Om det ett visst år finns 120 personer som ägnar sig åt att vara sysslolös, studera fysik resp. virka, hur ser fördelningen ut efter ett år? Närmar sig fördelningen ett stabilt tillstånd med åren? Bestäm vilken i sådana fall.

Problem. 70 (Florentina)

Bestäm A^{20}, där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 71 (Emma)

Låt $V = \{p(x) : \deg p \leq 3\}$ och låt T vara den linjära avbildningen som har egenskaperna $T(1) = x$, $T(x) = x^2$, $T(x^2) = x^3$ och $T(x^3) = 1$. Bestäm en egenvektor till T.

Problem. 72 (Elizaveta)

Försök förklara geometriskt varför matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
bara har egenvektorer parallella med $(1,0)^T$. Var avbildas vektorn $(a,b)^T$? Rita! Varför kan inte denna matris diagonaliseras?

Problem. 73 (Svetlana)

Argumentera för att en rotationsmatris i rummet alltid har en egenvektor med längd 1.

Problem. 74 (Evgeniya)

Visa att produkten av egenvärdena (räknat med multiplicitet) till en diagonaliserbar matris A ges av $|A| = p_A(0)$.

Problem. 75 (Elena)

Låt A vara en kvadratisk matris, där summan av talen i varje kolonn blir 1. Visa att 1 är ett egenvärde till A genom att visa följande serie av implikationer:

$$\begin{aligned}
&\text{Summan av alla rader i } A - I \text{ är 0.} && \Rightarrow\\
&\text{Determinanten } |A - I| \text{ är noll.} && \Rightarrow\\
&\text{Talet } 1 \text{ är ett egenvärde till } A.
\end{aligned}$$

Problem. 76 (Eugina)

Lös systemet nedan av första ordningens differentialekvationer med hjälp av diagonalisering:

$$\begin{cases}
f_1' &= 6f_1 + 4f_2 + 4f_3 + 4f_4\\
f_2' &= 2f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 2f_4\\
f_3' &= -4f_1 - 4f_2 - 2f_3 - 2f_4\\
f_4' &= -2f_1 - 2f_2 - 2f_3
\end{cases}$$

Problem. 77 (Elicia)

Lös följande system av linjära differentialekvationer

$$\begin{cases}
f' &= f - g - h\\
g' &= -f + g - h\\
h' &= -f + g + h
\end{cases}$$

med randvillkoren $f(0) = 1, g(0) = 2, h(0) = 0$.

10. Normer & skalärprodukter I sid. (225–230), 241–254

Kapitel 11 kan läsas någolunda kursivt, men det kan vara intressant läsning att se tanken bakom en norm. En norm är en slags generalisering av längd eller storlek. Olika normer har olika bra och dåliga egenskaper, och vilken som används beror på tillämpning.

I kapitel 12 definieras det *hermitiska konjugatet* till en matris, betecknat A^H. Denna konstruktion används flitigt för att behandla *skalärprodukter*. En skalärprodukt tilldelar varje par av vektorer ett (komplext eller reellt) tal. Definitionen på skalärprodukt är en viktig definition. Det finns lite olika sätt att beteckna skalärprodukten av två vektorer. Boken använder $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, i annan litteratur förekommer $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ och även $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v} \rangle$ används.

Skalärprodukten ger oss möjlighet att börja tala om *ortogonalitet*, två vektorer är ortogonala om deras skalärprodukt är 0, precis som vi känner igen från tidigare kurser i linjär algebra.

Gram-Schmidt-algoritmen ger oss en metod att från en uppsättning vektorer konstruera en ortonormal bas, och denna algoritm är mycket viktig att behärska.

Genom Gram-Schmidt dyker ganska naturligt begreppet *unitära* matriser upp, vilket är matriser A så att $A^H = A^{-1}$. Kolonnerna i en unitär matris bildar en ortogonal bas, vilket är det man tillverkar via Gram-Schmidt. Om man ser på en unitär matris som en avbildning, är det ungefär som en rotation (samt möjligen ett antal reflektioner). Vi har nämligen att $|A\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ för alla vektorer, och det är precis rotationer och reflektioner som bevarar längd på alla vektorer. En sådan typ av avbildning som bevarar längd kallas för *isometrisk avbildning*. Det är lite svårare att föreställa sig vad detta innebär geometriskt för komplexa matriser.

Med hjälp av Gram-Schmidt kan vi konstruera en QR*-uppdelning* av en godtycklig matris A, där vi uttrycker $A = QR$ där Q är en unitär matris, där kolonnerna är de basvektorer vi fick från Gram-Schmidt och R är en övertriangulär matris med positiva pivotelement. Denna uppdelning är praktisk när man t.ex. vill lösa stora ekvationssystem numeriskt.

Rekommenderade uppgifter 11.1-11.3, 12.1-12.10, 12.12, 12.13

Problem. 78 (Sabina)

Utför följande beräkningar på rummet av polynom med skalärprodukten

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

(a) $\langle x^2 | x \rangle$
(b) $\langle x^2 + 2 | x + 1 \rangle$
(c) $|x^2|$

Problem. 79 (Nelly)

Visa att $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j / j^2$ är en skalärprodukt i $\mathbb{C}^n$ och bestäm längden (definierad av denna skalärprodukt) av vektorn $(1, -2, 3)$.

Problem. 80 (Samantha)

Vektorerna $\mathbf{f}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{f}_2 = (1,0,-1)$ och $\mathbf{f}_3 = (0,0,1)$ är linjärt oberoende. Utför Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på dessa vektorer.

Problem. 81 (Simona)

Bestäm en ortonormerad bas för det rum som spänns upp av kolonnerna i matrisen nedan, och utvidga (om nödvändigt) till en bas för hela $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 82 (Savannah)

Vektorerna $(1,1,1), (1,0,3), (3,2,5)$ och $(0,-1,2)$ spänner upp ett underrum U i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ON-bas för detta underrum, och utvidga till en bas för hela $\mathbb{R}^3$.

Problem. 83 (Sandy)

Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1, 0, 0, -2)$ på rummet U som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1, 1)$, genom att först bestämma en ON-bas för U och utnyttja denna.

Problem. 84 (Stephanie)

Låt U vara det linjära höljet av vektorerna $(1, 1, 0, 1)$ och $(1, 0, 0, 0)$. Låt V vara det linjära höljet av $(0, 1, -1, 1)$ och $(0, 1, 1, 1)$. Bestäm en ON-bas för $U \cap V$ eller visa att detta bara är nollvektorn, utvidga till en ON-bas för U, utvidga denna bas ytterigare till en ON-bas för $U + V$ och utvidga denna slutligen till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

Problem. 85 (Nadezhda)

Bestäm en QR-uppdelning [23] av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 86 (Nadyenka)

Bestäm en QR-uppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 87 (Sophia)

En viss typ av data kan presenteras med hjälp av polynom. Dock kräver det ganska mycket plats att spara ett polynom, och vi är bara intresserade av den ortogonala projektionen på rummet U som spänns upp av vektorerna x och x^2. Vi använder standardskalärproduken för polynom, på intervallet $[0, 1]$.

---

[23] Var noga med att konjugera den vänstra vektorn i skalärprodukterna om du arbetar med komplexa tal.

Bestäm en ON-bas för U, och beräkna sedan den ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = 1 + 2x$ på U.

Problem. 88 (Siri)
Låt $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ där T:s nollrum spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, 0)$ och $(1, 0, 2, 0)$ och vektorerna $(1, 1, 1, 1)$ samt $(1, 1, -1, -1)$ är egenvektorer med egenvärde 1 resp. 2 till T, (ON-bas).

(a) Bestäm ON-baser för T:s nollrum och värderum.
(b) Beräkna $T(20, 2, -30, 0)$.

11. Normer & skalärprodukter II sid. 254–259

I Sats 12.5 listas ett antal ekvivalenta sätt att definiera unitära matriser. Dessa matriser är viktiga, så man bör vara väl bekant med deras egenskaper. Bland annat har vi att unitära matriser har en determinant [24] vars absolutbelopp är ett.

Vi går vidare med att definiera *adjointen* till en linjär operator. Om $A : V \to V$ är en linjär operator, definieras adjointen A^* till en linjär operator A genom att A^* är den linjära operator som uppfyller $(A^*\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Just i ändligtdimensionella vektorrum får man fram adjointen genom att transponatkonjugera motsvarande avbildningsmatris, om basen man använder är en ON-bas, se Sats 12.10.

Linjära operatorer som uppfyller att $A^* = A$ spelar en viktig roll inom kvantmekaniken. De motsvarande avbildningsmatriserna i en ON-bas är så kallade *hermitiska matriser* som uppfyller $A^H = A$.

Detta leder oss till del 12.6, där Sats 12.11 är en av de viktigaste satserna i boken, nämligen att hermitiska matriser alltid har reella egenvärden och alltid kan diagonaliseras med hjälp av unitära matriser. Beviet för det sistnämnda följer också direkt från Sats 13.6, där beviset är enklare än det som ges i Sats 12.11.

Slutligen, om $U \subseteq V$ är ett delrum, kan vi med hjälp av skalärprodukten definiera det *ortogonala komplementet* till U, betecknat $U^\perp$.

---

[24] Determinanten själv är alltså ett komplext tal på enhetscirkeln.

Detta är den mängd vektorer som är ortogonala mot alla vektorer i U. Sats 12.12 visar att $V = U \oplus U^\perp$ för alla delrum $U \subseteq V$. Man kan då bilda en ON-bas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ i V så att $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ är en ON-bas i U och $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en ON-bas i $U^\perp$. Vi kan då också definiera *ortogonal projektion* P_U på ett delrum U, som den linjära avbildningen som avbildar $a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_k\mathbf{e}_k + a_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + a_n\mathbf{e}_n \in V$ på $a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_k\mathbf{e}_k \in U$.

För P_U gäller då $P_U(u) = u$ för alla $u \in U$ och $P_U(v) = 0$ för alla $v \in U^\perp$.

Rekommenderade uppgifter 11.1-11.3, 12.1-12.10, 12.12, 12.13

Problem. 89 (Natalya)

Diagonalisera den hermitiska matrisen nedan med hjälp av en unitär matris.

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problem. 90 (Nastiona)

Diagonalisera den hermitiska matrisen nedan med hjälp av en unitär matris.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problem. 91 (Nonna)

Visa att avbildningsmatrisen för en ortogonal projektion är diagonaliserbar, och att alla egenvärden är 0 eller 1.

12. SV-uppdelning & normala matriser I sid. 263–270

I detta kapitel börjar vi med att notera att för godtycklig matris A så har $A^H A$ bara har reella, icke-negativa egenvärden. Vidare är $A^H A$ hermitisk, vilket innebär att denna kan diagonaliseras med unitära matriser. Dessa observationer är grunden till att konstruera en *singulärvärdesuppdelning* av en godtycklig matris A.

En matris kan alltid presenteras på formen $A = USV^H$ där U och V är unitära matriser, och S är en rektangulär matris med de *singulära värdena* till A på huvudduagonalen och övriga element är 0. Vi säger att $\sigma > 0$ är ett singulärt värde till A, om σ^2 är ett egenvärde till $A^H A$.

Denna uppdelning har många tillämpningar, till exempel så kan man välja enbart de k största singulära värdena och bilda matrisen S_k. Matrisen $A' = US_kV^H$ kommer då vara den matris med rang k som bäst approximerar matrisen A. Mer precist, av alla matriser X med rang maximalt k, gäller att $\|A - X\|_F$ är som minst då $X = A'$. Detta kan användas för att komprimera bilder eller annan data.

Sats 13.3 och 13.4 visar på att de singulära värdena till en matris säger väldigt mycket om matrisen, och några av de vanliga matrisnormerna beror enbart på de singulära värdena.

För en linjär avbildning, kan de singulära värdena för motsvarande matris ses ungefär som förstorningsfaktorer, längs med olika axlar. Fundera[25] på hur rang och antal singulära värden hänger samman.

Singulärvärdesuppdelningen visar på att alla avbildningar kan framställas genom först speglingar och rotationer[26], därefter förstorningar och förminskning samt projektioner [27] längs med koordinataxlarna, och slutligen ännu en serie rotationer och speglingar givna av U.

Rekommenderade uppgifter 13.1-13.4, 13.6, 13.8, 13.10-13.13

Problem. 92 (Adleta)

Bestäm en singulärvärdesuppdelning till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[25]Kom ihåg att rangen är samma som dimensionen för bildrummet av en matris.

[26]Med hjälp an en unitär matris V^H

[27]Detta representeras av S. Nollorna på huvuddiagonalen i S representerar projektion på koordinataxlarna.

Problem. 93 (Alyona)
Bestäm en singulärvärdesuppdelning till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. SV-uppdelning & normala matriser II sid. 270–276

Den andra delen av detta kapitel handlar om *normala* matriser, det vill säga, matriser som uppfyller att $A^H A = AA^H$. Unitära, hermitiska och skev-hermitiska matriser är alla exempel på normala matriser. Vi skall i detta kapitel visa att alla normala matriser kan diagonaliseras med hjälp av unitära matriser, vilket direkt visar att unitära och hermitiska matriser också kan diagonaliseras. Detta fyller i sista luckan tidigare resonemang, så som beviset för SV-uppdelning.

Schurs lemma visar att alla kvadratiska matriser kan *Schur-uppdelas* enligt $A = URU^H$, där U är unitär och R är övertriangulär. Denna uppdelning används upprepade gånger i Sats 13.8.

En viktig sak att påpeka med beviset för Schurs lemma är att man förutsätter användandet av *komplexa* egenvärden. Alla matriser har nämligen minst ett komplext egenvärde [28] och då minst en motsvarande egenvektor.

Vi sammanfattar nu alla möjligheter att diagonalisera en kvadratisk matris A:

(1) *A är normal:* Vi undersöker A:s egenvärden.
   (a) *Alla egenvärden är olika:* Alla egenrum är endimensionella. Vi finner egenvektorer som normeras och $A = UDU^H$ där U är unitär.
   (b) *Vissa egenvärden har multiplicitet:* Egenrummens storlek motsvarar multiplictiteten på motsvarande egenvärde. I varje egenrum finner man en bas, men man måste utföra

[28] Detta följer av att varje (karakteristiskt) polynom har minst en komplex rot.

Gram-Schmidt på denna för att få en ON-bas av egenvektorer. Dessa ger därefter en diagonalisering där $A = UDU^H$ med U unitär.

(2) *A är inte normal:* Vi undersöker A:s egenvärden.

(a) *Alla egenvärden är olika:* Om alla egenvärden är olika, är alla egenrum endimensionella. Vi finner egenvektorer, som vi vet är linjärt oberoende (men *inte* ortogonala). Egenvektorerna ställs upp som kolonner i en basbytesmatris och $A = SDS^{-1}$.

(b) *Vissa egenvärden har multiplicitet:* Vi måste undersöka de multipla egenvärdena. Om något egenrum har mindre dimension än multipliciteten på motsvarande egenvärde, så är matrisen *inte* diagonaliserbar. Om vi däremot hittar lika många linjärt oberoende egenvektorer som storleken på A, så diagonaliseras A som $A = SDS^{-1}$.

Notera att vi ingenstans förutsätter att egenvärdena är *reella*. Vi måste ibland använda komplexa egenvärden och egenvektorer vid diagonalisering, även om matrisen A bara innehåller reella tal!

Rekommenderade uppgifter 13.1-13.4, 13.6, 13.8, 13.10-13.13

Problem. 94 (Agafonika)

Visa att matrisen A nedan är normal, och presentera den på formen $A = UDU^H$ där U är en unitär matris.

$$A = \begin{pmatrix} 2-6i & 2-3i \\ -2-3i & 2+6i \end{pmatrix}.$$

Problem. 95 (Angelina)

Ge exempel på en matris med storlek 4×4 som har egenvärdena $1, 2, 3, 4$ och som

a) inte är normal.

b) är hermitisk, men är inte en diagonalmatris.

14. Kvadratiska och hermitiska former sid. 281–294

I kursens sista kapitel möter vi funktioner på formen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ där A är en hermitisk matris. Funktionen[29] kallas för en *hermitisk form*. Som ett exempel vi stött på tidigare är $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^H\mathbf{x}$ en hermitisk form.

En hermitisk form f är alltid reellvärd, så vi kan tala om huruvida f alltid är positiv för $\mathbf{x} \neq 0$, icke-negativ, och så vidare. Dettta leder till definitionen av att vara *positivt definit, positivt semi-definit* etcetera som definieras i Definition 14.1.

En viktig observation är att om vi utför ett basbyte på vektorerna, $\mathbf{x} = S\hat{\mathbf{x}}$ får vi en motsvarande hermitisk form i den nya basen, $\hat{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}}^H S^H AS\hat{\mathbf{x}}$.

I Sats 14.2 visas det att vi alltid kan hitta en bas, så att en hermitisk form $\mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ kan uttryckas som $f(\mathbf{x}) = \sum_i \lambda_i |x_i|^2$ där λ_i är egenvärdena[30] till A. Denna representation gör det då enkelt att se om en matris är positivt definit, eller någon av de andra begrepped definierade i Definition 14.1. Vi kan också enkelt finna största och minsta värde till en hermitisk form under bivillkoret $\|\mathbf{x}\| = r$ där r är en positiv konstant. Största och minsta värde under detta bivilkor ges helt enkelt av $\lambda_1 r^2$ resp. $\lambda_n r^2$ där λ_1, λ_n är största respektive minsta egenvärdet till A.

Observationen motiverar oss till att definiera begreppet *kongruenta matriser*, där två kvadratiska matriser A, B är kongruenta om $A = S^H BS$ för någon inverterbar matris S. I Sats 14.4 visar vi att varje hermitisk matris är kongruent med en diagonalmatris på formen

$$diag(1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1, 0, 0, \ldots, 0)$$

med p ettor och m minus-ettor. Paret av talen (p, m) kallas för *signaturen* av en hermitisk matris, och från signaturen kan vi omedelbart avgöra om en matris är positivt definit, indefinit och så vidare.

[29] Funktionen tar en vektor som argument.

[30] Kom ihåg att vi kan diagonalisera normala matriser.

Rekommenderade uppgifter 14.1-14.4, 14.7, 14.8, 14.13, 14.14

Problem. 96 (Kapitolina)

Finn signatur, största och minsta värde till den hermitiska form $f(\mathbf{x})$ som är given av matrisen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \begin{pmatrix} 4 & i & 1-i \\ -i & 4 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

under bivillkoret $|\mathbf{x}| = 4$.

Problem. 97 (Klavdiya)

Är en hermitisk $5 \times 5-$matris med signaturen $(4, 0)$ positivt definit? Om inte, vad är den då?

Problem. 98 (Klementina)

Ge exempel på en hermitisk 3×3-matris A med signaturen $(1, 1)$ så att största värdet för den hermitiska formen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ är 5 och minsta värdet är -4 under bivillkoret $\|x\| = 1$.

15. Några tillämpningar

Här kommer en kort lista på vad man kan använda delar av linjär algebra till.

(1) Googles Pagerank-algoritm[31] som bygger på att finna en viss egenvektor till en matris. Finns massa information om detta på nätet.

(2) Principalkomonentsanalys, att finna en ON-bas där koordinaterna är sorterade efter hur *viktiga* de är. Används för att finna kluster. Detta tillämpas inom medicin och rekommendationssystem.

Se `http://www.youtube.com/watch?v=_bSMW1Q9_Ks`.

(3) Ansiktsigengänning med PCA, så kallade *eigenfaces*.

Se `http://www.youtube.com/watch?v=n3sDhHH5tFg`.

(4) Bildkomprimering med SV-uppdelning. Sök på nätet.

[31] Namngiven efter Larry Page, en av grundarna till Google.

(5) Datortomografi (computer tomography), stora ekvationssystem och Kacmarz metod.
(6) Datorgrafik, fysikmotorer.

16. Kort lista på viktigaste delar

Följande defintioner är bland de viktigaste och skall kunna förklaras: *vektorrum, underrum, linjär avbildning, nollrum, värderum, dimension, rang, determinant, skalärprodukt, ortogonala vektorer, egenvärde, egenvektor, singulära värden, karakteristisk ekvation, unitär matris, hermitisk matris, normal matris, hermitiskt konjugat, hermitisk form*.

Följande typer av problem skall man kunna lösa:

- Göra beräknigar på blockmatriser.
- Beräkna determinanter av större matriser.
- Avgöra om ett objekt är ett vektorrum, och då bestämma en bas samt dimension för detta vektorrum.
- Givet en linjär avbildning, finna motsvarande matris i en given bas.
- Finna bas för summa och snitt för givna delrum.
- Bestämma rang, nollrum, värderum, egenvvärden och egenvektorer för en given matris eller linjär avbildning.
- Diagonalisera en linjär avbildning.
- Avgära om en funktion är en skalärprodukt, och använda andra skalärprodukter än standardskalärprodukten.
- Bestämma en ON-bas för ett givet (del)-vektorrum med Gram-Schmidt.
- QR-uppdela en matris.
- Singulärvärdesuppdela matriser.
- Avgöra om en matris är normal, och diagonalisera sådana med hjälp av unitära matriser.
- Diagonalisera en hermitisk form, bestämma dess största respektive minsta värde samt var dessa värden antas.

Lösning. 1

Exempelvis följande

(a) $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösning. 2

Produkterna är

$$\begin{pmatrix} -1+8i & 3i & 3+5i \\ 8 & 2 & 5 \\ -i & 2 & -7 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 2+8i & 5 \\ -i & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Lösning. 3

Matrisen ges av $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -7 & -10 \\ 1 & -1 & -5 & -8 \\ 3 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Lösning. 4

Exempelvis

(a) Radmatris $(1, 0, 2)$

(b) Kolonnmatris $(1, 0, 2)^T$

(c) Permutationsmatris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) Elementär matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) Diagonalmatris $diag(2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(f) Nilpotent matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösning. 5

Vi börjar med att transponera båda leden. Kom ihåg att $(AB)^T = B^T A^T$ samt att $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Vi får

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vi ställer nu upp det som en inversberäkning, men med den högra matrisen ovan till höger, snarare än identitetsmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right).$$

Låt oss kalla matriserna i respektive block för A och B, dvs. vi har blockupppställningen $(A|B)$. Gausselimination på denna blockmatris är ekvivalent med multiplikation från vänster med elementära matriser. När vi slutligen har identitetsmatrisen i vänsterblocket, har båda blocken multiplicerats med ursprungliga vänsterblockets invers från höger. Gausselimination gör alltså att $(A|B)$ övergår till $(I|A^{-1}B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera i kolonn 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \text{Platsbyte rad 2 \& 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \text{Fixa kolonn 3 \& teckenbyte}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 9 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \text{Fixa kolonn 2 \& teckenbyte}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -15 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Slutligen har vi då att

$$M^T = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 20 \\ -4 & 12 & -12 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -15 & 12 & -3 \\ 20 & -12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi är nu klara.

Lösning. 6

Lösning saknas.

Lösning. 7

(a) Eftersom A och B är nilpotenta, finns k_1, k_2 så att $A^{k_1} = 0$ och $B^{k_2} = 0$. Låt k vara det största talet av k_1 och k_2. Då gäller att $A^k = B^k = 0$. Nu har vi att $(AB)^k = (AB)(AB)\cdots(AB)$ men eftersom $AB = BA$ kan vi sortera om ordningen på matriserna, så $(AB)^k = A^k B^k$. Det sista uttrycket är nollmatrisen, eftersom $A^k = 0$.

(b) Låt k vara som ovan. Då har vi enligt binomialsatsen för matriser att

$$(A+B)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} A^{2k-j} B^j.$$

Denna får vi använda eftersom $AB = BA$. Tittar vi nu på $A^{2k-j}B^j$ ser vi att antingen är $2k - j \geq k$ eller $j \geq k$ om $0 \leq j \leq 2k$. Detta innebär att $A^{2k-j} = 0$ eller $B^j = 0$ för alla j, och vi har en summa av nollmatriser, som då givetvis blir nollmatrisen.

(c) Låt k vara som ovan, och titta på utvecklingen av

$$(A + A^2 + A^3 + \ldots + A^l)^k.$$

Detta blir en summa av potenser av A, där minsta exponenten som förekommer är k. Alla termer är då nollmatriser, och vi ser att uttrycket ovan blir nollmatrisen. Matrisen $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^l$ är då nilpotent.

Lösning. 8

Rangen är 2, (två gånger rad 1 plus rad 2 ger rad 3).

Lösning. 9

Vi börjar med att byta plats på de två första raderna med en permutationsmatris, P_{213}, genom multiplikation från höger. Alltså gäller

$$P_{213}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Till tredje raden adderas nu en $(-3)-$multipel av första raden:

$$(I + (-3)E_{31})P_{213}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Multiplikation från vänster på båda sidorna med $(I+(-3/2)E_{32})$ adderar $-\frac{2}{3}$ av rad två till rad tre:

$$(I + (-3/2)E_{32})(I + (-3)E_{31})P_{213}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Matrisen i högerledet är nu övertriangulär, och vi har bara gjort en permutation, som skedde först. Flyttar vi över produkten med elementära matriser (inverserna är lätta att beräkna för dessa), får vi att $P_{231}A = LU$ där

$$P_{231} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Lösning. 10

Vi byter plats på de två första raderna med permutationsmatrisen P_{213}, och får

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Byte av de två sista raderna med P_{132} ger slutligen

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

som är övertriangulär. Vi vill ha $PA = LU$, så vi vet nu att $P_{132}P_{213}A = LU$. Utför vi permutationerna, får vi

$$P_{132}P_{213}A = P_{231}A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Vi applicerar nu elementära matriser (från vänster) som gausseliminerar. Till rad två adderas (-1) av rad ett, vilket motsvarar $(I + (-1)E_{21})$:

$$(I + (-1)E_{21})P_{231}A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = U.$$

Vi har nått en övertriangulär matris, alltså har vi att $P_{231}A = (I + (-1)E_{21})^{-1}U$. Alltså är

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} U$$

en LU-uppdelning.

Lösning. 11

Vi gausseliminerar nedåt med hjälp av första raden och får

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 2+i\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1432}} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 2+i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

som sedan kan elimineras till att bli övertriangulär. Vi börjar således med $P_{1432}A$:

$$P_{1324}A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & i\\ i & 2i\end{pmatrix}$$

Radreducering nedåt med hjälp av första raden sker med hjälp av $(I + (-i)E_{41})(I + E_{31})$ och vi har

$$(I + (-i)E_{41})(I + E_{31})P_{1324}A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 2+i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Slutligen, $(I + (-2 - i)E_{32})$ ger oss

$$(I + (-2 - i)E_{32})(I + (-i)E_{41})(I + E_{31})P_{1324}A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Detta ger oss uppdelningen

$$P_{1324}A = [(I + (-2 - i)E_{32})(I + (-i)E_{41})(I + E_{31})]^{-1} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$P_{1324}A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2+i & 1 & 0\\ i & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Lösning. 12

Determinanten för en matris bevaras under transponering, samt operationen att addera en multipel av en rad till en annan rad. Vi kan alltså utföra en slags gauss-elimination, tills att matrisen blir övertriangulär. Determinanten byter tecken om vi byter plats på två rader och slutligen, determinanten av en övertriangulär är produkten av elementen på diagonalen.

Vi ser att de två första raderna är ganska lika, liksom de två sista, vilket utnyttjas för att beräkningarna skall gå lättare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{Subtrahera rad 2 från 1 \& och rad 4 från 3}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{Subtrahera rad 2 två gånger från rad 4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \text{Addera tredje raden fem gånger till rad 4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$

Vi vi byter nu plats på raderna 1 och 2, 2 och 3, och sedan 3 och 4, för att matrisen skall bli övertriangulär. Detta innebär tre byten av rader, så determinanten multipliceras med $(-1)^3$ och vi får

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-7) \cdot 4 = 28.$$

Determinantens värde är alltså 28.

Lösning. 13

Det ser ut som om det kommer bli svåra beräkningar om vi gausseliminerar. Tricket här är att utveckla determinanten längs en rad eller kolonn. I allmänhet, varje position i en determinant associeras ett tecken, liksom ett schackbräde, där övre vänstra hörnet alltid har positivt tecken:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Att utveckla längs en rad (kolonn) innebär att vi för varje position i raden (kolonnen), stryker de element som står på samma rad och kolonn, tar determinanten av den mindre matrisen, och multiplicerar med elementet samt tecken. Alla dessa termer adderas sedan samman. I vårt konkreta problem väljer vi att utveckla längs med första raden, då denna innehåller många nollor, vilket underlättar berkningarna. Determinanten blir då

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+1 \\ 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & x+1 \\ 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x^2 & x+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x^2 & x \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Eftersom två av dessa termer är multiplicerade med 0, så försvinner dessa. Det som återstår är då uttrycket

$$x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+1 \\ 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x^2 & x \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Vi utvecklar de två mindre determinanterna på samma sätt, längs med första resp. sista raden, eftersom dessa rader innehåller många nollor.

$$x\left(1\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} x^2 & x+1 \\ 0 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & x-1\end{vmatrix}\right)$$
$$-2\left(0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & x\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x\end{vmatrix} + (x-1)\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x^2\end{vmatrix}\right) =$$
$$x\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 1\end{vmatrix} - 2(x-1)\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x^2\end{vmatrix}$$

Slutligen beräknas de sista determinanterna med formeln för $2\times 2-$determinanter, och vi får

$$x\left(x\cdot 1-(x-1)(x+1)\right)-2(x-1)\left(x\cdot x^2 - x\cdot 1\right) =$$
$$x(x-x^2+1)-2(x-1)(x^3-x) =$$
$$x^2-x^3+x-2(x^4-x^2-x^3+x)$$

Determinantens värde är då $-2x^4+x^3+3x^2-x$.

Lösning. 14

Endast svar presenteras: (a) x^2-x+12, (b) $-x^2$, (c) 1.

Lösning. 15

Första steget blir att beräkna determinanten i vänsterledet. Rad 3 multiplicerade med x subtraheras från rad 1. I nästa steg utvecklar vi längs med första kolonnen, då denna innehåller många nollor. I tredje steget utvecklar vi längs med första raden:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x^2 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$= -(1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1\end{vmatrix}.$$

Ekvationen reduceras då till $-(1-x^2)(1-x^2)=0$ som med hjälp av konjugatregeln faktoriseras om till $(1-x)^2(1+x)^2=0$.

Svar: Ekvationens lösningar är $x = \pm 1$, där båda är dubbelrötter.

Lösning. 16

Först beräknas determinanten. Första raden används för att eliminera i övriga rader. Därefter utvecklar vi längs med första kolonnen och bryter vi ut faktorn $x-1$ ur sista raden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 1 & 2 & 4 & 3x \\ 1 & 3 & 9 & 2x \\ 1 & x & x^2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 0 & 1 & 3 & -3x \\ 0 & 2 & 8 & -4x \\ 0 & x-1 & x^2-1 & 6-6x \end{vmatrix}$$
$$= (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3x \\ 2 & 8 & -4x \\ 1 & x+1 & -6 \end{vmatrix}$$

Vi forstätter med att med hjälp av första raden eliminera i de två andra:

$$=(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3x \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & x-2 & 3x-6 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2 & 2x \\ x-2 & 3x-6 \end{vmatrix} =$$
$$=(x-1)\left((6x-12) - 2x(x-2)\right) = -2(x-1)(x^2-5x+6)$$

Ekvationen i uppgiften reduceras (efter division med -2) således till

$$(x-1)(x^2-5x+6) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

vilket fås efter att hitta rötterna till andragradsuttrycket med t.ex. kvadratkomplettering. Det är nu klart att ekvationens lösningar ges av $x = 1, 2, 3$.

Lösning. 17

Determinanten bevaras under gausselimination, så vi subtraherar första raden från alla de övriga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-1-x \end{vmatrix}$$

Matrisen i determinanten är övertriangulär, så dess determinant är produkten av diagonalelementen, vilket blir $1 \cdots (1-x)(3-x)(5-x) \cdots (2n-1-x)$. Detta polynom har nollställena $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$, vilket då blir svaret på uppgiften.

Lösning. 18

Rangen bevaras under radreducering, så vi börjar med att radreducering med hjälp av sista raden:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det ser ut som om alla rader är linjärt oberoende, utom för mycket speciella värden på a. Detta innebär att rangen generellt är 4 då vi har precis fyra rader. För att verifiera detta, och finna de eventuellt speciella värdena på a beräknar vi determinanten av denna matris. Utveckling längs med första kolonnen leder till

$$\begin{aligned} |A| &= -\begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\left((a-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (a^3-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -\big((a-1) - (a^2-1)\cdot 2 + (a^3-1)\cdot 1 \big) \end{aligned}$$

$$= 1 - a + 2a^2 - 2 + 1 - a^3$$
$$= -a^3 + 2a^2 - a = -a(a^2 - 2a + 1) = -a(a-1)^2$$

Vi ser att endast då $a = 0$ och $a = 1$ så är rangen inte 4. Dessa värden sätts in i matrisen vi fick efter radreducering.

Fall $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och rangen för ursprungliga matrisen är alltså 3 om $a = 0$.

Fall $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger även detta att rangen 3. Sammanfattningsvis: Rangen för den givna matrisen är 4, utom då $a = 0$ eller $a = 1$, och i dessa fall är rangen 3.

Lösning. 19

Efter gausselimination av (a) fås t.ex. matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som har två pivotelement, så rangen är två. Detta innebär att antalet linjärt oberoende rader i ursprungliga matrisen är 2. Samma gäller för kolonnerna. Notera nu att matrisen i uppgift (b) är transponatet av (a), där rader har bytts till kolonner. Alltså har linjärt oberoende rader blivit linjärt oberoende kolonner och vice versa, och rangen i (a) och (b) måste nödvändigtvis vara samma.

Lösning. 20

Varje rad är miltiplicerad med c, så ur var och en av de n raderna kan vi bryta ut c.

Lösning. 21

(a) Detta beviset ges i boken, Sats 3.1 (upplaga 2012).

(b) Basfallet är klart, nollmatrisen har determinant noll. Antag nu att detta är sant för $(n-1)\times(n-1)$-matriser och låt A vara en $n \times n$-matris med bara nollor på översta raden. Utveckling längs med första kolonnen ger nu

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + \cdots \pm a_{n1}D_{n1}.$$

Notera att $a_{11} = 0$ och D_{j1} för $j \geq 2$ är determinanter av $(n-1)\times(n-1)$-matriser där första raden bara innehåller nollor. Dessa är enligt induktionsantagande noll, så hela determinanten $|A|$ är då noll.

(c) Låt A vara $n \times n$ och undertriangulär. Basfallet $n = 1$ är klart. Antag att påståendet är sant för mindre matriser. Utveckling längs med första kolonnen i A ger

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + \cdots \pm a_{n1}D_{n1}.$$

där D_{11} är determinanten av en undertriangulär matris med elementen $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ på huvuddiagonalen. Matriserna D_{j1} för $j \geq 2$ är matriser där första raden bara innehåller nollor, så alla dessa är noll. Vi konstaterar att $|A| = a_{11}D_{11}$ och induktion ger att $|A| = a_{11}\ldots a_{nn}$.

(d) Detta är Sats 3.2 i boken.

(e) Detta resultat visas på sidan 54 (upplaga 2012).

(f) Nu kan vi sätta samman allt. Låt A vara en kvadratisk matris, som LU-upppdelas som $PA = LU$. Detta leder till $A = P^{-1}LU$ och vi får att $|A| = |P^{-1}||L||U|$.

Transponerar vi båda sidorna i $A = P^{-1}LU$ får vi istället att

$$A^T = (P^{-1}LU)^T = U^T L^T (P^{-1})^T = U^T L^T P$$

vilket leder till att $|A^T| = |U^T||L^T||P|$. Men eftersom U och U^T har samma huvuddiagonal, och determinanten på triangulära matriser är produkten av diagonalelementen, så följer det att $|U| = |U^T|$. På samma sätt gäller att $|L| = |L^T|$. Vi har också att $|P| = |P^{-1}|$ vilket följer från att $|P| = \pm 1$ och $|PP^{-1}| = |I| = 1$.

Således,

$$|A| = |P^{-1}||L||U| = |P||L^T||U^T| = |A^T|$$

och vi har ett bevis för att $|A| = |A^T|$.

Lösning. 22

I deluppgift (a), kan man till exempel ta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svaret på deluppgift (b) är nej. Om B har rang 4, så har B full rang, och då är $|B| \neq 0$. Det följer att $|B^k| = |B|^k$ är nollskild för alla heltal $k > 0$. Eftersom nollmatrisen har determinant 0, finns det inget k så att B^k är nollmatrisen. Matrisen B kan alltså inte vara nilpotent.

Lösning. 23

Det finns många sätt att lösa denna uppgift. Här presenteras ett par.

Induktion och blockmatriser: Det första som sker, är att vi beräknar $|C_1|$, $|C_2|$ och $|C_3|$. Efter lite jobb blir dessa värden -3, 9 och -27. Vi tror att $|C_n| = (-3)^n$. Basfallet $n = 1$ är redan klart. Antag nu att $|C_n| = (-3)^n$ för ett visst n. Vi vill visa att $|C_{n+1}| = (-3)^{n+1}$. Tittar vi på hur C_{n+1} ser ut, kan denna skrivas på blockform som

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & C_n & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där 0 representerar en rad eller kolonn med nollor av lämplig storlek. Determinanten beräknas genom utveckling längs med första kolonnen, och ger

$$|C_{n+1}| = \begin{vmatrix} C_n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ C_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Notera tecknen. Kom ihåg att C_n har storlek $2n \times 2n$. Utvecklar vi var och en av matriserna längs med sista kolonnen, får vi nu

$$|C_{n+1}| = \left|C_n\right| - 4\left|C_n\right| = -3|C_n|.$$

Alltså, $|C_{n+1}| = -3|C_n|$. Om nu $C_n = (-3)^n$, så måste då $C_{n+1} = (-3)^{n+1}$. Induktionsbeviset är nu klart.

Gausselimination: Vi kan med hjälp av Gausselimination direkt arbeta med $|C_n|$:

$$|C_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rad j multipliceras med -2 och läggs sedan till rad $2n - j$, för $j = 1, 2, \dots, n$. Detta eliminerar alla tvåor i det nedre, vänstra $n \times n$-blocket i matrisen. Operationerna bevarar determinanten och resultatet blir en övertriangulär blockmatris,

$$|C_n| = \begin{vmatrix} I & 2A \\ 0 & I - 4I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 2A \\ 0 & -3I \end{vmatrix}$$

där A är $n \times n$-matrisen med ettor på anti-diagonalen. Eftersom resultatet ovan är övertriangulär, ges determinanten av produkten av diagonalelementen, $1^n(-3)^n = (-3)^n$. Alltså är $|C_n| = (-3)^n$.

Lösning. 24

Rangen för AB^T och B^TA är båda maximalt det minsta värdet på m och n. En av produkterna har då inte full rank, och då följer det att determinanten är 0. För andra delen av uppgiften, välj $A = (1, 0)$ och $B = (1, 0)^T$. Då är $|AB| = 1$ men $|BA| = 0$.

Lösning. 25

Lösning saknas.

Lösning. 26

Vi vet att V har dimension tre. Det räcker alltså att visa att de tre polynomen vi fått är linjärt oberoende, eftersom de är rätt till antalet. Vi vill alltså visa att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ är den enda lösningen till ekvationen

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2-1) + \lambda_3(2x) = 0.$$

Vi bryter ut potenser av x och får att ovanstående ekvation blir

$$(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_3) + \lambda_2 x^2 = 0.$$

För att detta skall gälla för alla x, måste koefficienterna framför varje potens vara 0. Detta ger oss systemet

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

som enbart har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Vi har nu visat att $1+x$, x^2-1 och $2x$ är linjärt oberoende, och eftersom de är lika många som dimensionen på V, följer det att de är en bas.

Vi skall nu finna koordinaterna för polynomet x^2+3x+2 i denna bas. Koordinaterna är precis den unika lösning $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ till ekvationen

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2-1) + \lambda_3(2x) = x^2 + 3x + 2.$$

vilket på samma sätt som ovan leder till ett ekvationssystem, nämligen

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & = 3 \\ \lambda_2 & = 1 \end{cases}.$$

Detta löses, och vi finner att $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 1, 0)$. Koordinaterna för polynomet x^2+3x+2 i basen $\{1+x, x^2-1, 2x\}$ ges alltså av $(3, 1, 0)$.

Lösning. 27

Vi vet att $\mathbb{R}^3$ är ett vektorrum, så det räcker att visa att V är ett delrum till $\mathbb{R}^3$. För att visa detta, måste vi visa att V är sluten under addition, samt multiplikation med $\lambda \in \mathbb{R}$.

Antag att $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V$, det vill säga $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ och $x_2 + y_2 + z_2 = 0$. Summan av dessa två vektorer blir $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Vi vill visa att denna vektor uppfyller att $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$ för då ligger denna vektor i V. Men observera att

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)$$

eftersom vi antog att de båda uttrycken i de högra parenterserna är noll. Vi har alltså visat att V är sluten under addition.

För att visa att V är sluten under multiplikation med skalär, räcker det med att inse att om $x + y + z = 0$, så är även $\lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ för alla $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har alltså konstaterat att om $(x, y, z) \in V$ så gäller även att $\lambda(x, y, z) \in V$ så V är sluten under multiplikation med skalär. V är då ett delvektorrum.

Vi vill nu beskriva mängden av vektorer i V lite elegantare, så vi löser ekvationssystemet $x + y + z = 0$. Detta system har oändligt många lösningar, som på parameterform kan skrivas $(x, y, z) = s(1, -1, 0) + t(1, 0, -1)$, där $s, t \in \mathbb{R}$. Alla vektorer i V kan då skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1, -1, 0)$ och $(1, 0, -1)$. Dessa vektorer är linjärt oberoende, och utgör då en bas för V.

Sammanfattningsvis, $(1, -1, 0)$ och $(1, 0, -1)$ utgör en bas för V och V:s dimension är 2 eftersom det krävs två basvektorer för att spänna upp V.

Lösning. 28

För att visa att det är ett delrum, måste vi visa att V är sluten under addition, samt under multiplikation med skalär.

Slutenhet under additition: Vi har två matriser $A_1, A_2 \in V$ som då kan skrivas som

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & a_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ -b_2 & a_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Summan av dessa matriser är då

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ -b' & a' & c' \end{pmatrix}$$

där $a' = a_1 + b_1$ $b' = b_1 + b_2$ och $c' = c_1 + c_2$. Det är då klart att $A_1 + A_2$ också ligger i V.

Slutenhet under multiplikation med skalär: Låt oss titta på λA_1 och notera att

$$\lambda A_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ -\lambda b_1 & \lambda a_1 & \lambda c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ -b' & a' & c' \end{pmatrix}$$

där $a' = \lambda a_1$ $b' = \lambda b_1$ och $c' = \lambda c_1$. Det är då klart att λA_1 ligger i V. Vi är nu klara med deluppgift (a).

För att hitta en bas noterar vi att det finns tre parametrar att variera, a, b och c. Vi ser att

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{m_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m_3}.$$

Från detta är det nu uppenbart att alla matriser i V kan skrivas som en linjärkombination av m_1, m_2 och m_3, så vi kan säga att dessa *spänner upp* V. Vi ser också att m_1, m_2 och m_3 är linjärt oberoende, enda lösningen till

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ges av att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Linjärt oberoende, samt att m_1, m_2 och m_3 spänner upp V betyder precis att dessa matriser utgör en bas i V.

Slutligen,

$$\begin{pmatrix} 2 & \pi & 42 \\ -\pi & 2 & 42 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 42 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så koordinaterna för den givna matrisen i basen m_1, m_2, m_3 är $(2, \pi, 42)$.

Lösning. 29

Delmängderna (a) och (d) är delvektorrum i $\mathbb{R}^3$.

I mängd (b) så är mängden inte sluten under addition, (vektorerna $(1,1,0)$ och $(2,4,0)$ ligger i mängden, men inte deras summa $(3,5,0)$, eftersom $3^2 \neq 5$) och i (c) finns inte nollvektorn med, som alltid skall finnas i ett vektorrum.

Lösning. 30

Vi måste visa att ekvationen

$$b_1 + b_2(x+1) + b_3(x^2+x+1) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

alltid har en unik lösning, oavsett c_1, c_2, c_3. Detta översätts till ekvationssystemet

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 & = c_1 \\ b_2 + b_3 & = c_2 \\ b_3 & = c_3 \end{cases}$$

som på matrisform blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c_1 - c_3 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 - c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 - c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right)$$

Systemet har alltså den entydiga lösningen $(b_1, b_2, b_3) = (c_1 - c_2, c_2 - c_3, c_3)$ så $1, x+1, x^2+x+1$ är en bas, och koordinaterna för $c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ i denna bas är $(c_1 - c_2, c_2 - c_3, c_3)$.

Lösning. 31

En bas för U ges t.ex. av polynomen x, x^2, x^3 och lägger vi till polynomet 1 fås en bas för hela rummet.

Lösning. 32

Ansätter vi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ översätts villkoret $BA = 0$ till matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efter utförd multiplikation leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + 2c & = 0 \\ b + 2d & = 0 \end{cases}$$

vars lösningar är $(a, b, c, d) = s(2, 0, -1, 0) + t(0, 2, 0, -1)$. En bas ges då av matriserna $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ och delrummets dimension är då två.

Lösning. 33

Radrummet till en matris är det linjära rum som spänns upp av matrisens rader. Detta rum bevaras under gausselimination på raderna. Värderummet spänns upp av linjärt oberoende kolonner i matrisen, och motsvarar de kolonner i A som har pivotelement efter uförd gausselimination. Nollrummet ges av alla lösningar till systemet $Ax = 0$.

Genom gausselimination på raderna kan vi lätt svara på alla tre frågorna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \text{ Eliminera med hjälp av första raden.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{ Eliminera med hjälp av rad 2, byt tecken.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De nollskilda raderna är linjärt oberoende, så A: radrum spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, -1, 1)$ och $(0, 0, 1, 0, 0)$. Kolonn 1 och 3 är de enda kolonnerna med pivotelement, så kolonn 1 och 3 i ursprungliga matrisen är en bas för värderummet till A, dvs. $(1, 1, 0, 2)^T$ och $(2, 1, 1, 3)^T$. Slutligen, om vi ser resultatet ovan som vänsterledet i ekvationssystemet $Ax = 0$ efter utförd gausselimination, får vi den parametriserade lösningen $x = s(0, 1, 0, 0, 0) + t(1, 0, 0, 1, 0) + u(-1, 0, 0, 0, 1)$ och vektorerna $(0, 1, 0, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 1, 0)^T$ samt $(-1, 0, 0, 0, 1)^T$ utgör då en bas för nollrummet till A.

Lösning. 34

(a) Efter gausselimination får vi enhetsmatrisen. Rader och kolonner måste då vara linjärt oberoende. En bas för radrummet, (och kolonnrummet) ges av standardbasen. Matrisen har bara nollvektorn i nollrummet, så detta rum saknar basvektorer. Värderummet är samma som kolonnrummet, så även här fungerar standardbasen. Rangen för matrisen är 4.

(b) Matrisen radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De nollskilda raderna blir en bas för radrummet, första och tredje kolonnen innehåller pivotelement så dessa kolonner i ursprungliga matrisen blir en bas för kolonnrummet och därmed värderummet. Vektorerna $(3, 0, -1, 0, 1)$, $(-2, 0, -1, 1, 0)$, samt $(3, 1, 0, 0, 0)$ utgör en bas för nollrummet, och matrisens rang är 2.

(c) Matrisen radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De nollskilda raderna blir en bas för radrummet, första och tredje kolonnen innehåller pivotelement så dessa kolonner i ursprungliga matrisen blir en bas för kolonnrummet och därmed värderummet. Vektorerna $(4, 0, -3, 1)$, och $(-2, 1, 0, 0)$ utgör en bas för nollrummet, och matrisens rang är 2.

Lösning. 35

En bas för värderummet resp. radrummet ges av de två första kolonnerna resp. raderna i matrisen. En bas för nollrummet ges av vektorn $(0, 0, 1)$.

Lösning. 36

Metod (a): Vi ställer upp vektorerna som rader till en matris, så U är alltså radrummet till A nedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Gausselimination bevarar radrummet, så vi utför gausselimination tills vi får linjärt oberoende rader somt nollrader:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En bas för U ges då av vektorerna $(1, 0, 2)$ och $(0, 1, -3)$.

Metod (b): Vi ställer upp de vektorer som spänner upp U som kolonner i en matris:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Kolonnrummet (även kallat bildrummet) spänns upp av B:s kolonner, och är då samma linjära rum som U. De kolonner *i denna matris* som innehåller ett pivotelement efter gausselimination, utgör en linjärt oberoende mängd som spänner upp kolonnrummet.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De två första kolonnerna innehåller pivotelement, så de två första kolonnerna i B utgör en bas till U. Dessa är $(1, 0, 2)$ och $(-1, -1, 1)$.

Lösning. 37

Vi vill behålla de ursprungliga vektorerna. Därför ställer upp vektorerna som kolonner i en matris, och fyller på med enhetskolonner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Målet är nu att ta fram linjärt oberoende kolonner i denna matris. Vi utför gausselimination, tills matrisen är på trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

De fyra första kolonnerna innehåller pivotelement, så de motsvarande kolonnerna i ursprungliga matrisen är linjärt oberoende. Alltså måste vektorerna $(1, 3, -1, -1)$, $(0, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 0, 0)$ och $(0, 1, 0, 0)$ utgöra en bas för $\mathbb{R}^4$.

Lösning. 38

Vi ställer upp vektorerna som rader i en matris, på formen $\begin{pmatrix} U & U \\ V & 0 \end{pmatrix}$ där U och V är blockmatriserna med vektorerna som spänner upp U respektive V:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi utför gausselimination på denna matris. De nollskilda radvektorerna i vänsterledet efter utförd gausselimination ger en bas för radrummet i vänsterledet. Detta är samma som en bas för alla vektorer som kan skrivas som linjärkombinationer av vektorer från U och V, och är då en bas för $U + V$. De radvektorer i högerledet, där motsvarande vänsterled är nollvektorn, kommer ge en bas för snittet $U \cap V$.

(Detta kan ses som att en linjärkombination av vektorer från U blev exakt lika med en linjärkombination av vektorer i V och deras skillnad är då nollvektorn i vänsterledet. U-delen är vektorn i högerledet. Denna vektor måste då tillhöra $U \cap V$).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{Eliminera med hjälp av första raden}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) = \text{Rad 3 på 2, radbyte 2 och 5.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) = \text{Eliminera med hjälp av rad 2.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \text{Rad 3 delas med -2, eliminera.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) = \text{-1 av rad 4 till rad 6, radbyte.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{Eliminera med hjälp av rad 4.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De tre linjärt oberoende vektorer i vänsterledet ger en bas för $U + V$ som i detta fall är samma som $\mathbb{R}^3$. Vi kan då använda standardbasen, eller den vi fått fram, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Snittet ges av de två linjärt oberoende vektorerna i högerledet $(1, 1, 0)$ och $(0, -1, 1)$.

Lösning. 39

Endast svar ges till detta problem:

(a) $U + V = \mathbb{R}^3$ så standardbasen fungerar. $U \cap V$ spänns upp av $(1, 0, 1)$.
(b) $U + V$ spänns upp av $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ och $(0, 0, 0, 1)$. $U \cap V$ spänns upp av $(5, 0, 4, 1)$.
(c) $U + V = U \cap V$ och dessa spänns upp av $(11, 0, -1, -2)$ och $(0, 11, -5, -10)$.
(d) $U + V$ är hela $\mathbb{R}^3$, så dessa spänns upp t.ex. av standardbasen. Snittet $U \cap V$ består endast av nollvektorn.

Lösning. 40

I var och en av uppgifterna, ställ upp vektorernas koordinater i standardbasen för resp. vektorrum, som kolonner i en matris. Radreducera till trappstegsform. De kolonner med pivotelement indikerar en bas för det linjära rum som vektorerna i M spänner upp. I (a) och (b) utgör t.ex. de tre första vektorerna en bas. Svaret i (b) fås från radreducering av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt, i (c) utgör de två första vektorerna en bas, och slutligen i (d) är det första, andra och femte polynomet en bas.

Lösning. 41

(a) Notera att $U = \operatorname{Im} A$, eftersom U ges av kolonnrummet till A. Det är klart att $\operatorname{rank}(A\ B) \geq \operatorname{rank} A$ för alla matriser B som har rätt antal rader, rangen för en matris är antalet linjärt oberoende kolonner, och detta antal kan inte minska genom att lägga till fler kolonner.

Om nu $\operatorname{rank}(A\ B) > \operatorname{rank} A$ följer det att minst en kolonn i B är linjärt oberoende från kolonnerna i A. Detta innebär att om $\operatorname{rank}(A\ B) = \operatorname{rank} A$ så är alla kolonnerna i B linjärkombinationer av kolonnerna i A. Således, $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im} A = U$. Å andra sidan, så har vi att $\dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A = \dim U$. Enda möjligheten är då att kolonnerna i B spänner upp hela U. Eftersom vi visste att B:s kolonner dessutom är linjärt oberoende, utgör dessa en bas för U.

(b) Vi ställer upp resp. mängd av vektorer som kolonner i matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Vi börjar med att beräkna rangen på respektive matris:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $\operatorname{rank} A = 3$ och A:s kolonner är linjärt oberoende. På liknande sätt visas att rangen för B också är tre. Slutligen bestämmer vi rangen för $(A\ B)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & -7 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Fortsatt radreducering ger

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 14\\ 0 & 0 & -9 & -27 & -27 & -90\\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -10\end{pmatrix}.$$

Slutligen är matrisen på trappstegsform:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 14\\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vi ser då att $\mathrm{rank}(A\ B) = 3$ och det följer att $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$. Alltså är de två baserna en bas för samma linjära delrum.

Lösning. 42

Den har storlek 6×5. En vektor med 5 koordinater måste avbildas på en med 6 koordinater.

Lösning. 43

Kolonnerna i avbildningsmatrisen är koordinaterna för bilden av basvektorerna. Standardbasen i $\mathbb{R}^3$ är $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ samt $(0, 0, 1)$. Vi har att

- $F(1, 0, 0) = (1 - 0, 0 - 0, 0 - 1, 1 + 0 + 0) = (1, 0, -1, 1)$
- $F(0, 1, 0) = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0, 0 + 1 + 0) = (-1, 1, 0, 1)$
- $F(0, 0, 1) = (0 - 0, 0 - 1, 1 - 0, 0 + 0 + 1) = (0, -1, 1, 1)$

Matrisen för T ges då av

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Rangen för denna matris är 3, så kärnan för avbildningen har dimension 0. Alltså är avbildningen injektiv. Avbildningen kan inte vara surjektiv, dimensionen på Ts bildrum är samma som matrisens rang, alltså 3.

Detta är inte samma som dimensionen på $\mathbb{R}^4$. Avbildningen är då inte surjektiv.

Lösning. 44

Vi söker vad 1, x och x^2 avbildas på, under de givna linjära avbildningarna.

(a) Ett polynom avbildas på sin derivata. Bilderna blir 0, 1 och $2x$.
(b) Avbildningen evaluerar polynomet i $x-1$. Bilderna blir därför 1, $x-1$ och $(x-1)^2$.
(c) Avbildningen evaluerar polynomet i $2x$, och multiplicerar resultatet med 3. Bilderna blir 3, $6x$ och $12x^2$.
(d) Vi får samma svar som i första deluppgiften, men multiplicerat med x. Detta ger 0, x och $2x^2$.

Lösning. 45

Kolonnerna i avbildningsmatrisen är koordinaterna för bilden av basvektorerna, så vi beräknar var basvektorerna avbildas. Första basvektorn, 1, avbildas på -1 som har koordinaterna $(-1,0,0)$. Andra basvektorn, x, avbildas på $-(x-1)=1-x$ som har koordinaterna $(1,-1,0)$. Tredje basvektorn, x^2, avbildas på $-(x-1)^2=-1+2x-x^2$ som har koordinaterna $(-1,2,-1)$. Avbildningsmatrisen för T i basen $1,x,x^2$ ges då av

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. 46

I var och en av lösningarna bestämmer vi avbildningsmatrisen genom att se var basvektorerna avbildas. Övriga egenskaper kan sedan bestämmas från respektive matris.

Lösning (a):

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to (1,1,1,1)$$

$$F\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} \to (1,0,-1,0)$$

$$F\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \to (0,1,0,0)$$

$$F\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \to (0,0,0,-1)$$

Detta ger avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Utför vi gausselimination på denna matris, ser vi att alla kolonner kommer att ge pivotelement. Därför gäller det att $\ker F = 0$ och att $\operatorname{Im} F$ är hela rummet, och spänns t.ex. upp av den bas som var given i uppgiften. Eftersom matrisen nollrummet är nolldimensionellt, är avbildningen injektiv. Eftersom bildrummet är hela $M_2(\mathbb{R})$, är avbildningen surjektiv. F är då också bijektiv, och rangen för avbildningen är 4, vilket är samma som dimensionen på bildrummet, alternativt antalet kolonner med pivotelement efter att matrisen reducerats till trappstegsform.

Lösning (b): Vi får avbildningen beskriven som vad den för med basvektorerna. Vi tackar och tar emot:

$$F(1) = x^3 + 1 \to (1,0,0,1)$$

$$F(x+1) = x^2 - 1 \to (-1,0,1,0)$$

$$F(x^2+1) = x - 1 \to (-1,1,0,0),$$

vilket ger oss avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ som radreduceras till } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vi ser att de tre ursprungliga kolonnerna är linjärt oberoende, eftersom alla kolonner i den radreducerade matrisen innehåller pivotelement. Detta ger att bildrummet spänns upp av x^3+1, x^2-1 samt $x-1$ och är tredimensionellt. Tre är också avbildningens rang. Avbildningen har nolldimensionellt nollrum, så den är injektiv, men eftersom bildrummet bara är tredimensionellt, men vi avbildar in i det fyradimensionella $P_3(\mathbb{R})$, så är F inte surjektiv. F saknar då också invers.

Lösning (c): Standardbasen i $P_3(\mathbb{R})$ är $1, x, x^2, x^3$ och vi får

$$\begin{aligned} F(1) &= 1+x+x^2 \to (1,1,1) \\ F(x) &= 0+x+2x^2 \to (0,1,2) \\ F(x^2) &= 0+x+4x^2 \to (0,1,4) \\ F(x^3) &= 0+x+8x^2 \to (0,1,8). \end{aligned}$$

Avbildningsmatrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ som radreduceras till } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3. \end{pmatrix}$$

Från den radreducerade matrisen ser vi att de tre första kolonnerna i avbildninsmatrisen är linjärt oberoende, och utgör då en bas för bildrummet. Översätts dessa tillbaka till polynom i $P_2(\mathbb{R})$, är dessa polynom $1+x+x^2$, $x+2x^2$ samt $x+4x^2$, som då utgör en bas för det tredimensionella värderummet. Rangen för avbildningen är då tre. Vidare, nollrummet till matrisen är endimensionellt och parametriseras av $s(0,2,-3,1)^T$. En bas för nollrummet ges då av polynomet $2x-3x^2+x^3$, och detta blir endimensionellt. Avbildningen kan då inte vara injektiv. Dimensionen på bildrummet och dimensionen på $P_2(\mathbb{R})$ är samma, så avbildningen är surjektiv.

Lösning (d): Vi har att $F(1,0)=1=1+0i$ och $F(0,1)=i=0+1i$. Detta ger oss att avbildningsmatrisen är $2\times 2-$identitetsmatrisen. Från detta ser vi att 1 och i är en bas för värderummet, som då är tvådimensionellt, samt rangen för avbildningen är 2. Bildrummet är då samma som $\mathbb{C}$, och avbildningen är surjektiv. Nollrummet är nolldimensionellt, så avbildningen är injektiv, och då också bijektiv eftersom vi har surjektivitet.

Lösning. 47

Det är underförstått att vi skall använda standardbaserna i respektive rum. Vi bestämmer bilderna av basvektorerna: $T(1,0,0) = (1,1,2,1)$, $T(0,1,0) = (-1,1,0,0)$, $T(0,0,1) = (2,-1,1,-3)$. Bildvektorerna ställs upp som kolonner i avbildningsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ som radreduceras till } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har pivotelement i alla kolonner, är nollrummet nolldimensionellt, och saknar bas. Alla kolonner i avbildningsmatrisen är linjärt oberoende (eftersom dessa innehöll pivotelement efter gausselinination), så $(1,1,2,1)$, $(-1,1,0,0)$ och $(2,-1,1,-3)$ är en bas för bildrummet. Notera, detta är alltså samma rum som kolonnrummet till avbildningsmatrisen.

Lösning. 48

Vi löser med hjälp av gausselimination på A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De två första kolonnerna innehåller pivotelement, så motsvarande kolonner i A är en bas för värderummet, $\operatorname{Im} A$. En bas för $\operatorname{Im} A$ ges således av vektorerna $(1,-1,2)$ och $(1,1,3)$.

Löser vi ekvationssystemet $A\mathbf{x} = 0$ får vi fram kärnan, $\ker A$. I den radreducerade matrisen ovan, så blir den tredje kolonnen parameterkolonn, och lösningarna till $A\mathbf{x} = 0$ ges av $\mathbf{x} = t(1,1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$. Vektorn $(1,1,-1)$ utgör då en bas för $\ker A$, också kallar nollrummet till A.

Slutligen, radrummet för en matris bevaras under radreducering. Raderna i den radreducerade matrisen ovan späänner då upp A:s radrum. De nollskilda raderna i den radreducerade matrisen är också linjärt oberoende, så dessa utgör en bas för radrummet. Vektorerna $(1,0,1)$ och $(0,1,1)$ utgör då en bas för radrummet till A.

Lösning. 49

Vi har att $\dim \operatorname{Im} T = 3$ eftersom rang och dimension på bild är samma tal. Då måste kärnan ha dimension 1. Ja, man kan alltid lösa ekvationen, men lösningen är inte unik.

Lösning. 50

Vi bestämmer först avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbaserna. För detta behöver vi bilderna av basvektorerna:

$$\begin{aligned} T(1) &= x \cdot 1 - 1 = -1 + x \\ T(x) &= x(2ix) - x = -x + 2ix^2 \end{aligned}$$

Detta leder till koordinatvektorerna $(-1, 1, 0)$ samt $(0, -1, 2i)$ som ställs upp som kolonner i avbildningsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

Radreduktion ger nu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Båda kolonnerna innehåller pivotelement, så kärnan till matrisen är nolldimensionell. Det finns alltså ingen bas för kärnan till matrisen, och $\ker T$ är då också nolldimensionell.

En bas för bildrummet ges av de båda kolonnerna i avbildningsmatrisen, $(-1, 1, 0)$ samt $(0, -1, 2i)$ och motsvarande vektorer i $P_2(\mathbb{C})$ är då polynomen $-1 + x$ samt $-x + 2i$. Dessa utgör en bas i bildrummet till T.

Lösning. 51

Vi börjar med att bestämma T:s avbildningsmatris i standardbasen.

$$\begin{cases} T(1) & = (x+1)'' = 0 \\ T(x) & = \left(x^2+x\right)'' = 2 \\ T(x^2) & = \left(x^3+x^2\right)'' = 2+6x. \end{cases}$$

T:s avbildninsmatris är således

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Funktionsssammansättning av linjära avbildningar motsvarar multiplikation av respektive matriser. Avbildningsmatrisen för $T \circ T$ ges då av

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet till A^2 ges av $s(1,0,0) + t(0,1,0)$ $s,t \in \mathbb{R}$ vilket ger att 1 och x utgör en bas för nollrummet till $T \circ T$. Eftersom den sista kolonnen i A^2 är den enda nollskilda kolonnen, är denna bas för A^2:s värderum. Det konstanta polynomet 12 utgör då en bas för värderummet. Eftersom $T \circ T$:s värderum enbart är de konstanta polynomen, så finns det inte något $p(x)$ av grad max två som avbildas på x under sammansättningen $T \circ T$.

Lösning. 52

(a) Elementen i V är på formen $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$. En bas är då t.ex. 1, x, x^2, x^3, x^4 och x^5.

(b) Vi har att $T_1(1) = x^5$, $T_1(x) = 1 + x^5$, $T_1(x^2) = x^5 + 2x$, $T_1(x^3) = x^5 + 3x^2$, $T_1(x^4) = x^5 + 4x^3$ samt $T_1(x^5) = x^5 + 5x^4$.

Matrisen för avbildningen i den bas vi valt ovan ges då av

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och på liknande sätt ges avbildningsmatrisen till T_2 av

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den första matrisen har linjärt oberoende kolonner, vilket lätt inses efter en gausselimination. Därför måste värderummet vara hela V och en bas för detta rum har vi bestämt i (a). Nollrummet är då på grund av dimensionsskäl enbart nollvektorn.

För den andra avbildningen, så är de fem första kolonnerna linjärt oberoende, och de motsvarande polynomen utgör då en bas för för bildrummet. Således, polynomen $-5x^4$, $1-5x^4$, $2x-5x^4$, $3x^2-5x^4$ och $4x^3-5x^4$ utgör en bas för bildrummet till T_2. Vi kan också utläsa att polynomet x^5 avbildas på nollvektorn, så $\{x^5\}$ är en bas för nollrummet till T_2.

Lösning. 53

Utför vi gausselimination på raderna i A får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En bas för A:s nollrum ges då av $(2,1,-1)^T$. De två första kolonnerna innehåller pivotelement, så de två första kolonnerna i A är en bas för A:s värderum.

Vi gör samma beräkning på B:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vi konstaterar att B:s nollrum består enbart av nollvektorn, och värderummet spänns upp av alla kolonner i B.

Slutligen, värderummet för BA måste vara bilden av A:s värderum under B. Vi får att $B(1,1,0)^T = (1,3,6,3)^T$ och $B(2,1,-1)^T = (1,4,6,1)^T$. Dessa spänner upp ett tvådimensionellt rum, med bas $(1,3,6,3)^T$ och $(1,4,6,1)^T$. Vi har också att nollrummet till A också är en del av nollrummet till BA. Eftersom $\dim\ker BA + \dim\operatorname{Im} BA = 3$ och vi just har visat att $\dim\operatorname{Im} BA = 2$, och att $\dim\ker BA \geq 1$ så följer det att A:s nollrum också är BA:s nollrum.

Lösning. 54

(a) Allmänt har vi att för en avbildning $T : V \to U$ gäller det att $\dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T = \dim V$. Från informationen given följer det att $\dim V_1 = 2 + 2 = 4$ och $\dim V_2 = 3 + 3 = 6$.

(b) Vi har att $\ker A \subseteq \ker BA$ eftersom om $Ax = 0$ så gäller också att $BAx = 0$. Detta ger att $\dim\ker BA \geq 2$. Det kan nu vara så att $\operatorname{Im} A \subseteq \ker B$ eftersom $\dim\operatorname{Im} A = 2$ och $\dim\ker B = 3$. Den sammansatta avbildningen skulle då avbilda alla vektorer på nollvektorn, och $\dim\ker BA = 4$. Alla möjliga värden där emellan är också möjliga, så $\dim\ker BA$ är 2,3 eller 4. Detta leder till att värderummet till BA har dimension 0, 1 eller 2. Som exempel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Här gäller $\dim \operatorname{Im} B_1 A = 2$, $\dim \operatorname{Im} B_2 A = 1$ samt $\dim \operatorname{Im} B_3 A = 0$.

Lösning. 55

Om $(2, 7, 3)$, $(-1, -3, 1)$ och $(1, 5, 9)$ är linjärt oberoende, så är dessa en bas för $\mathbb{R}^3$. Matrisen med dessa som kolonner blir en inverterbar matris, och vi kan bestämma F unikt via ett ekvationssystem. Dock,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -15 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

så vektorerna är inte en bas. Tricket blir då att uttrycka den en av vektorerna som en linjärkombination av de andra två. (Detta skall gå då vi nyss kom fram till att vektorerna var linjärt beroende.)

$$\lambda(2, 7, 3) + \mu(-1, -3, 1) = (1, 5, 9)$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu & = 1 \\ 7\lambda - 3\mu & = 5 \\ 3\lambda + \mu & = 9 \end{cases}$$

Löser vi detta system, fås $\lambda = 2$ och $\mu = 3$. Således,

$$2(2, 7, 3) + 3(-1, -3, 1) = (1, 5, 9).$$

Använder vi F på båda sidor, och utnyttjar att F skall vara linjär, fås

$$2(2, 7, 3) + 3(-1, -3, 1) = (1, 5, 9) \Rightarrow$$
$$F\left(2(2, 7, 3) + 3(-1, -3, 1)\right) = F(1, 5, 9) \Rightarrow$$
$$2F(2, 7, 3) + 3F(-1, -3, 1) = F(1, 5, 9) \Rightarrow$$
$$2(1, 0, 1) + 3(0, 3, -1) = F(1, 5, 9) \Rightarrow$$

$$F(1,5,9) = (2,9,-1)$$

där vi använt oss av att vi fick $F(2,7,3)$ samt $F(-1,-3,1)$ givna i uppgiften. Dvs. för att F skall vara linjär, måste vi ha $F(1,5,9) = (2,9,-1)$, vilket strider mot att $F(1,5,9) = (1,4,-1)$. Därför finns det inte en sådan linjär avbildning.

Lösning. 56

$A = S^{-1}BS \Leftrightarrow A^{-1} = (S^{-1}BS)^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} = S^{-1}B^{-1}S$ så båda inverserna måste existera samtidigt.

Lösning. 57

Ja, med $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösning. 58

Ja, avbildningen har invers, eftersom avbildningsmatrisen i standardbasen $1, x, x^2, \ldots$ är övertriangulär $n \times n$-matris med ettor på huvuddiagonalen.

Lösning. 59

Lösning saknas.

Lösning. 60

Vi ställer upp och beräknar

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^{ax} \\ \cos x & -\sin x & ae^{ax} \\ -\sin x & -\cos x & a^2e^{ax} \end{vmatrix}.$$

Utvecklar vi determinanten och förenklar, får vi $W = -(a^2+1)e^{ax}$ som är skild från 0 precis om $a \neq \pm i$. Alltså är funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och e^{ax} är linjärt beroende precis då $a = \pm i$.

Lösning. 61

Vi måste verifiera alla axiom som gäller för vektorrum. Vörst noterar vi att V är sluten under vektoradditionen, dvs. produkten av två positiva kontinuerliga funktioner är återigen en sådan funktion. Samma sak gäller om vi bildar den nya funktionen f^λ från en kontinuerlig positiv funktion f. Notera att om funktionen inte var positiv, så hade f^λ inte nödvändigtvis varit kontinuerlig. Alltså är V sluten under additionen, och multiplikation med skalär.

- Associativitet: $f \oplus (g \oplus h) = f \oplus (gh) = fgh = (fg) \oplus h = (f \oplus g) \oplus h$
- Kommutativitet: $f \oplus g = fg = gf = g \oplus f$
- Funktionen som är konstant 1 agerar som nollvektor, $1 \oplus f = 1f = f$.
- Varje vektor har en additiv invers. Vektorn f har inversen f^{-1} och $f^{-1} \oplus f = f^{-1}f = 1$.

För skalärmultiplikationen gäller

- Associativitet: $(\lambda\mu) \otimes f = f^{\lambda\mu} = (f^\mu)^\lambda = \lambda \otimes (\mu \otimes f)$.
- Distributivitet:

$$\lambda \otimes (f \oplus g) = (fg)^\lambda = (f^\lambda)(g^\lambda) = (\lambda \otimes f) \oplus (\lambda \otimes g)$$

- Enhetselement: $1 \otimes f = f^1 = f$

Alla dessa likheter följer från potenslagarna och vi har nu visat att V är ett vektorrum.

(a) $T(f(x)) = \sqrt{f(x)}$ är en linjär avbildning. Vi har nämligen att

$$T(f \oplus g) = T(fg) = (fg)^{\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} = T(f) \oplus T(g)$$

samt att

$$T(\lambda \otimes f) = T(f^\lambda) = (f^\lambda)^{\frac{1}{2}} = (f^{\frac{1}{2}})^\lambda = \lambda \otimes T(f).$$

(b) $T(f(x)) = f(x) + 1$ är inte linjär. Nollvektorn, $f(x) = 1$ avbildas inte på sig själv.

(c) $T(f(x)) = f(-x)$ är linjär.

$$T(f \oplus g) = T(fg) = f(-x)g(-x) = T(f) \oplus T(g)$$

samt att

$$T(\lambda \otimes f) = T(f^\lambda) = f(-x)^\lambda = \lambda \otimes T(f).$$

(d) $T(f(x)) = f(x)^{x^2-1}$ är linjär.

$$T(f \oplus g) = T(fg) = (fg)^{x^2-1} = f^{x^2-1}g^{x^2-1} = T(f) \oplus T(g)$$

samt att

$$T(\lambda \otimes f) = T(f^\lambda) = (f^\lambda)^{x^2-1} = (f^{x^2-1})^\lambda = \lambda \otimes T(f).$$

Lösning. 62

Matrisens karakeriskiska polynom ges av

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(8-\lambda) + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Vi finner att egenvärdena ges av $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 2$. Egenvektorerna ges nu av $\ker(A - \lambda I)$, fall $\lambda_1 = 7$ ger oss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-7 & 3 & 0 \\ -2 & 8-7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Detta leder till att vektorn $(1,2)^T$ utgör en egenvektor med egenvärde 7 till matrisen A. På samma sätt, fallet $\lambda_2 = 2$ ger oss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & 3 & 0 \\ -2 & 8-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger oss egenvektorn $(3,1)^T$. Sammanfattningsvis, $(1,2)^T$ är en egenvektor med egenvärde 7, och $(3,1)^T$ är en egenvektor med egenvärde 2.

Lösning. 63

Vi fann i problem 62 att $(1,2)^T$ är en egenvektor med egenvärde 7, och $(3,1)^T$ är en egenvektor med egenvärde 2. Detta ger oss enligt formeln för diagonalisering att

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{T^{-1}}.$$

Lösning. 64

Först bestämmer vi matrisens karakteristiska polynom, genom att beräkna $\det(A - \lambda I)$.

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&- 2\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= (5-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) + 2(6-2\lambda) - 2(-6+2\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.
\end{aligned}
$$

Här gissar vi en heltalsrot, som måste vara en jämn delare till 9. Vi ser att $\lambda = 3$ är en rot, och polynomdivision samt lösning av resulterande andragradare ger att karakteristiska polynomet kan faktoriseras som $-(\lambda-3)^2(\lambda-1)$. Matrisens egenvärden är då $\lambda = 3$ och $\lambda = 1$. Det återstår att bestämma motsvarande egenrum, det vill säga, en bas till lösningsrummet till ekvationssystemet $A - \lambda I = 0$.

Fallet $\lambda = 1$ ger oss $A - I = 0$ och ekvationssystemet blir

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \text{ Dela allt med 2, platsbyte.}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \text{ Eliminera med första raden.}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \text{ Styk sista raden.}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

I sista steget multiplicerades också andra raden med -1. Lösningarna ges på parameterform, $t(1,1,1)^T$. Egenrummet till egenvärdet $\lambda = 1$ spänns alltså upp av vektorn $(1,1,1)$ och denna vektor är alltså en egenvektor med egenvärde 1.

Fallet $\lambda = 3$ ger systemet $A - 3I = 0$ och vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \text{ Behåll första raden, dividera med 2.}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vi får ett tvådimensionellt lösningsrum, $s(1,1,0)^T + t(1,0,1)^T$. Vektorerna $(1,1,0)^T$ och $(1,0,1)^T$ är då båda egenvektorer med egenvärde 3, och dessa spänner upp det tvådimensionella egenrummet med egenvärde 3.

Lösning. 65

Vi har i problem 64 bestämt en bas av egenvektorer, $(1,1,1)^T, (1,1,0)^T$ samt $(1,0,1)^T$ och de har motsvarande egenvärden $1, 3$ och 3. Vi kan då diagonalisera A som $A = TDT^{-1}$ där T är basbytesmatrisen vars kolonner utgörs av egenvektorerna, och D är diagonalmatrisen med motsvarande egenvärden på huvuddiagonalen. Vi har att

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och denna måste inverteras. Vi ställer upp detta som en gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera med första raden}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera med rad 2 och 3 i rad 1.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \text{Fixa till raderna rad 2 och 3.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Således,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notera att man kan få ett annat svar på denna uppgift, eftersom det finns många olika val av bas för egenrummet med egenvärde 3.

Lösning. 66

Här presenteras endast facit. Notera att egenvärden som är dubbelrötter till karakteristiska polynomet oftast bara ger en egenvektor. Arbetar man med symmetriska eller normala matriser, så blir dimensionen på egenrummet dock alltid samma som multipliciteten av egenvärdet.

(a) Egenvektorer $(1, 0, 0)$ och $(0, 0, 1)$ med egenvärden -3 samt 1.

(b) Egenvektorer $(-21, -8, 28)$ och $(0, 1, 0)$ med egenvärden -4 samt 3.

(c) Egenvektorer $(-8, 9, 7)$, $(-3, 4, 4)$ samt $(0, 1, 1)$ med egenvärden -5, -4 samt -1.

Lösning. 67

För att en 3×3-matris skall kunna diagonaliseras, måste vi finna tre linjärt oberoende egenvektorer. Den karakteristiska ekvationen till A ges av $|A - \lambda I| = (1 - \lambda)^3$ eftersom $A - \lambda I$ är övertriangulär. Vi har alltså enbart egenvärdet 1. Vi bestämmer nu en bas för motsvarande egenrum, vilket för $\lambda = 1$ ges av kärnan till $A - I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eftersom rangen för denna matris är ett, är kärnan tvådimensionell (en bas för kärnan är $(1,0,0)^T$ och $(0,1,0)^T$). Vi behöver ett tredimensionellt rum av egenvektorer, så matrisen kan inte diagonaliseras.

Lösning. 68

Låt säga vi har en diagonaliserbar matris $A = TDT^{-1}$. Om $D^{\frac{1}{3}}$ ges av diagonalmatrisen D men med kubikroten ur alla element, så följer det att

$$(TD^{\frac{1}{3}}T^{-1})^3 = (TD^{\frac{1}{3}}D^{\frac{1}{3}}D^{\frac{1}{3}}T^{-1}) = TDT^{-1} = A.$$

Strategin blir då att diagonalisera matrisen

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

En snabb beräkning ger oss egenvärdena 8 och 1. Egenvärdet 8 leder till beräkningen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så motsvarande egenvektor blir $(1,1)^T$. På samma sätt, egenvärdet 1 leder till

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och en egenvektor fås av $(2,-5)^T$. Diagonalisering ger nu att

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

har då ha egenskapen vi söker.

Lösning. 69

Vi kan beskriva övergångarna med en övergångsmatris A, där kolonn j beskriver hur grupp j omfördelas. Element a_{ij} säger hur stor procent som går från grupp j till grupp i. I A motsvarar kolonnerna de sysslolösa, de som studerar fysik, resp. de som virkar. Övergångsmatrisen ges då av

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

och vår startvektor är $\mathbf{v}_0 = (120, 120, 120)^T$. Varje övergång mellan den årliga fördelningen representeras då av en matrismultiplikation. Nästföljande års fördelning ges av $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0$ och så vidare. Vi finner efter matrismultiplikation att $\mathbf{v}_1 = (96, 156, 108)$, så detta är fördelningen av studenter efter ett år.

Vad som nu eftersöks är beteendet av $A^n \mathbf{v}_0$ då $n \to \infty$, vilket vi kan undersöka genom att diagonalisera A. Karakteristiska polynomet ges av

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \frac{8}{10} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} - \lambda & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= 1000 \begin{vmatrix} 8 - 10\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 8 - 10\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 7 - 10\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Utveckling längs med första raden ger

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \frac{1}{1000}(8 - 10\lambda) \begin{vmatrix} 8 - 10\lambda & 3 \\ 2 & 7 - 10\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{1000}(8 - 10\lambda) \left[(8 - 10\lambda)(7 - 10\lambda) - 6\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1000}(8-10\lambda)(100\lambda^2 - 150\lambda + 50)$$
$$= \frac{50}{1000}(8-10\lambda)(2\lambda^2 - 3\lambda + 1).$$

Detta leder till egenvärdena $\lambda_1 = \frac{8}{10}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}$.

Vi beräknar nu motsvarande egenvektorer:

Fallet $\lambda_1 = \frac{8}{10}$ ger oss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vektorn $\mathbf{u}_1 = (3, -1, -2)^T$ är en bas för motsvarande egenrum.

Fallet $\lambda_2 = 1$ ger oss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vektorn $\mathbf{u}_2 = (0, 3, 2)^T$ är en bas för motsvarande egenrum.

Slutligen, fallet $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ ger oss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vektorn $\mathbf{u}_3 = (0, 1, -1)^T$ är en bas för motsvarande egenrum. Basbytesmatrisen T ges då av kolonnerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ och

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Alltså diagonaliseras A som TDT^{-1} och eftersom $A^n = TD^nT^{-1}$ får vi

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{8}{10}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{10}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Notera att då $n \to \infty$, så gäller det att $\left(\frac{8}{10}\right)^n \to 0$ och $\left(\frac{5}{10}\right)^n \to 0$.

Gränsfördelningen, $A^n \mathbf{v}_0$ blir då

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Beräknar vi denna produkt, får vi slutligen vektorn $(0, 216, 144)^T$ som då är den stabila gränsfördelningen.

Lösning. 70

Lösning saknas.

Lösning. 71

Vi kan direkt bestämma avbildningsmatrisen för T i basen $1, x, x^2, x^3$. Polynomet $a+bx+cx^2+dx^3$ har koordinaterna (a, b, c, d) i denna basen. Vi får t.ex. att $(1, 0, 0, 0)$ avbildas på $(0, 1, 0, 0)$ eftersom 1 avbildas på x. Avbildningsmatrisen ges då av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar det karakteristiska polynomet med hjälp av determinanten, som att utvecklas längs med första raden:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Det sista uttrycket förenklas till $(-\lambda)^4 - 1$ och vi ser nu att $\lambda = 1$ är ett nollställe till avbildningsmatrisens karakteristiska polynom. Det bör alltså finnas ett polynom som avbildas på sig själv:

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2+dx^3) = a+bx+cx^2+dx^3 \Leftrightarrow \\ ax+bx^2+cx^3+d = a+bx+cx^2+dx^3 \Leftrightarrow \\ (d-a)+(a-b)x+(b-c)x^2+(c-d)x^3 = 0. \end{aligned}$$

Vi ser nu att om vi väljer $a = b = c = d = 1$ så uppfylls sista raden. Man kan nu lätt att kontrollera att polynomet $1 + x + x^2 + x^3$ är en egenvektor till avbildningen (men det behövs inte, metoden ovan garanterar att det är en egenvektor om man räknat rätt på vägen).

Alternativt kan man bestämma en bas för $\ker(A - I)$, då detta rum spänns upp av egenvektorerna med egenvärde 1.

Lösning. 72

Varje vektor ovanför $x-$axeln förflyttas till höger. [32] Vi kan då inte ha egenvektorer som inte är parallella med $x-$axeln.

Lösning. 73

Rotation i rummet sker alltid kring en axel. Denna axel är en egenvektor, och då denna avbildas på sig själv utan längdförändring, så det motsvarande egenvärdet är 1.

Lösning. 74

Sätt in $\lambda = 0$ i $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$. Faktorisera $p_A(\lambda)$ med egenvärden som rötter, och utveckla. Sätt $\lambda = 0$.

Lösning. 75

Lösning saknas.

[32] Rektanglar med sidor parallella med koordinataxlarna blir parallellogram.

Lösning. 76

Låt $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Systemet kan då skrivas som $\mathbf{f}' = A\mathbf{f}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om vi kan diagonalisera A som $A = S^{-1}DS$ så gäller

$$\mathbf{f}' = S^{-1}DS\mathbf{f} \iff (S\mathbf{f})' = D(S\mathbf{f}) \iff \mathbf{g}' = D\mathbf{g}$$

där det senare systemet med är $\mathbf{g} = S\mathbf{f}$ är enkelt att lösa. Första steget är alltså att diagonalisera A.

En diagonalisering ger (exempelvis) att

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2-i & 2+i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Systemet $\mathbf{g}' = D\mathbf{g}$ blir

$$g_1' = (2+2i)g_1, \ g_2' = (2-2i)g_2, \ g_3' = 2g_3, \ g_4' = 2g_4.$$

Eftersom dessa är fyra oberoende första ordningens linjära diffekvationer kan vi enkelt lösa dem:

$$g_1 = C_1e^{(2+2i)t}, \ g_2 = C_2e^{(2-2i)t}, \ g_3 = C_3e^{2t}, \ g_4 = C_4e^{2t}.$$

Sambandet $\mathbf{g} = S\mathbf{f}$ ger nu att $S^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{f}$ så

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2-i & 2+i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{(2+2i)t} \\ C_2e^{(2-2i)t} \\ C_3e^{2t} \\ C_4e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

Vi kan skriva denna matrismultiplikation på följande sätt, där den allmänna lösningen kan läsas av:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = C_1 e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2-i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$+ C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notera att vi egentligen direkt kan hoppa till denna form då vi har beräknat egenvärdena och motsvarande egenvektorer. Här är $C_1, \ldots, C_4$ komplexa parametrar. Vill vi få de reella lösningarna, måste vi arbeta lite till.

Notera att de två första vektorerna är varandras konjugat, dvs, vi har $C_1\mathbf{w} + C_2\overline{\mathbf{w}}$. Utnyttjar vi detta och använder lite algebra med komplexa tal, kan man visa att de reella lösningarna parametriseras av $\mathrm{Re}((a+ib)\mathbf{w})$.

Vi vill alltså dela upp vektorn $(a+ib)\mathbf{w}$ i real och imaginärdel, och sedan plocka ut enbart realdelen. Genom att utnyttja att

$$e^{(2+2i)t} = e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t)$$

får vi att $(a+ib)e^{(2+2i)t}(-2,-1,2-i,1)^T$ är lika med

$$(a+ib)e^{2t} \begin{pmatrix} -2\cos 2t - 2i \sin 2t \\ -\cos 2t - i \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t + 2i \sin 2t - i \sin 2t \\ \cos 2t + i \sin 2t \end{pmatrix} =$$
$$e^{2t} \begin{pmatrix} -2a\cos 2t + 2b \sin 2t \\ -a\cos 2t + b \sin 2t \\ 2a\cos 2t + a\sin 2t - 2b \sin 2t + b\cos 2t \\ a\cos 2t - b \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$+ie^{2t}\begin{pmatrix} -2b\cos 2t - 2a\sin 2t \\ -b\cos 2t - a\sin 2t \\ 2b\cos 2t + b\sin 2t + 2a\sin 2t - a\cos 2t \\ b\cos 2t + a\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Detta kan i sin tur skrivas som

$$ae^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ -\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + be^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t \\ -2\sin 2t + \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$
$$+aie^{2t}\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -\sin 2t \\ 2\sin 2t - \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + bie^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ -\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Sammanfattar vi nu allt sammans, får vi att de allmänna *reella* lösningarna ges av

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = ae^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ -\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + be^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t \\ -2\sin 2t + \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$
$$+ C_3e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

där a, b, C_3, C_4 nu är reella tal.

Avslutningsvis, om vi nu vill hitta lösningar som uppfyller vissa randvillkor, så kan man antingen utgå ifrån den allmänna komplexa lösningen, eller lösningen ovan (om randvillkoren är reella).

Lösning. 77

Systemet kan skrivas på matrisform som

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Kalla 3×3-matrisen ovan för A. Om A kan diagonaliseras, så ges den allmänna lösningen till systemet av

$$(f(t), g(t), h(t)) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_2 t} + C_3 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_3 t}$$

där C_1, C_2 och C_3 är godtyckliga komplexa tal, λ_i och $\mathbf{v}_i$ är ett egenvärde och motsvarande egenvektor till A.

Matrisen ovan kan vi bestämma egenvektorer och egenvärden till, vi får $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 2$. Motsvarande egenvektor ges exempelvis av $(1, 1, 0)$, $(1, 1, -1)$ samt $(1, 0, -1)$.

Vi har då den allmänna lösningen

$$\begin{cases} f(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t} \\ g(t) = C_1 + C_2 e^t \\ h(t) = -C_2 e^t + C_3 e^{2t} \end{cases}.$$

Insättning av randvillkoren och $t = 0$ ger nu att

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3 \\ 2 = C_1 + C_2 \\ 0 = -C_2 + C_3 \end{cases}.$$

Löser vi detta linjära ekvationssystem, finner vi till sist att lösningen som uppfyller de givna randvillkoren är

$$\begin{cases} f(t) = 1 + e^t - e^{2t} \\ g(t) = 1 + 1e^t \\ h(t) = -e^t + e^{2t} \end{cases}.$$

Lösning. 78

(a) Vi har enligt definitionen ovan att

$$\langle x^2|x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

(b) På samma sätt

$$\begin{aligned}\left\langle x^2+2\middle|x+1\right\rangle &= \int_{-1}^{1} (x^2+2)\cdot(x+1)dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^3+x^2+2x+2dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

(c) Enligt definitionen på längd av en vektor, får vi att

$$|x^2| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\cdot x^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Lösning. 79

Vi har att

$$\|(1,-2,3)\| = \sqrt{\langle(1,-2,3)|(1,-2,3)\rangle} = \sqrt{\frac{1^2}{1^2}+\frac{(-2)^2}{2^2}+\frac{3^2}{3^2}} = \sqrt{3}.$$

Lösning. 80

Vi börjar med att sätta $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1/|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Därefter sätter vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1 \\
&= (1,0,-1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,-1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\
&= (1,0,-1) - \frac{1}{3}\langle (1,1,1) | (1,0,-1) \rangle (1,1,1) \\
&= (1,0,-1) - 0(1,1,1)
\end{aligned}$$

Vi får således att $\mathbf{e}_2 = v_2/|v_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Slutligen,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (0,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (0,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{3}\langle (1,1,1) | (0,0,1) \rangle (1,1,1) - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \middle| (0,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \\
&= \frac{1}{3}(-1,-1,2) - \frac{1}{2}\langle (1,0,-1) | (0,0,1) \rangle (1,0,-1) \\
&= \frac{1}{3}(-1,-1,2) + \frac{1}{2}(1,0,-1) \\
&= \frac{1}{6}(-2,-2,4) + \frac{1}{6}(3,0,-3) \\
&= \frac{1}{6}(1,-2,1)
\end{aligned}$$

Vi får således att $\mathbf{e}_3 = v_3/|v_3| = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

Vektorerna $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ samt $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ utgör alltså en ON-bas för samma rum som $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ spänner upp.

Lösning. 81

Vi använder oss av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ beteckna de tre kolonnerna i matrisen. Vi finner att

$$|\mathbf{f}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

och genom att normera $\mathbf{f}_1$ får vi den första vektorn i den ON-bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ som sökes. Således, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Nästa steg är att använda oss av $\mathbf{f}_2$, men denna vektor är parallell med $\mathbf{e}_1$ så vi kan inte utvidga vår bas med $\mathbf{f}_2$.

Som tredje steg, använder vi då istället $\mathbf{f}_3$ och beräknar får enligt algoritmen

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_1 \\
&= \mathbf{f}_3 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\
&= (1,0,1) - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (1,1,1) \\
&= \frac{1}{3}(1,-2,1)
\end{aligned}$$

Det återstår att normera $\mathbf{v}_3$, och då $\mathbf{v}_3$ är parallell med vektorn $(1,-2,1)$ räcker det att normera denna. Vi finner att $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

Vi har nu slut på kolonner att använda ur matrisen, så vi måste själva utvidga $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ med en till vektor. Här kan man ansätta vilken vektor som helst som inte ligger i det linjära höljet av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Här väljer vi vektorn $\mathbf{f}_4 = (1,-1,0)$ då denna är ortogonal mot $\mathbf{e}_1$ så beräkningarna blir något lättare:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{f}_4 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (1,-1,0) - \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,-1,0) \right\rangle}_{=0 \text{ enl val}} \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= \mathbf{f}_4 - 0 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \middle| (1,-1,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{f}_4 - \frac{1}{6}\langle(1,-2,1)|(1,-1,0)\rangle(1,-2,1) \\
&= \mathbf{f}_4 - \frac{1}{6}\cdot 3\cdot(1,-2,1) \\
&= (1,-1,0) - \frac{1}{2}(1,-2,1) \\
&= \frac{1}{2}(1,0,-1)
\end{aligned}
$$

Normerar vi nu denna vektor, får vi $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

Sammanfattningsvis, vektorerna

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\;\; \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \text{ samt } \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$, där de två första vektorerna är en ON-bas för kolonnrummet till matrisen given i uppgiften.

Lösning. 82

Vi börjar med att ta fram vektorer som spänner upp U, och utvidga dessa till en bas för $\mathbb{R}^3$. Vi ställer upp de givna vektorerna som kolonner i en matris, tillsammans med enhetskolonnerna. Därefter gausseliminerar vi tills matrisen är på trappstegsform:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

Vektorerna på position 1, 2 och 5 i den ursprungliga matrisen är då en bas för $\mathbb{R}^3$ där de två första även är en bas för U. Vi utför då Gram-Schmidt på dessa tre vektorer i denna ordning, nämligen med $\mathbf{f}_1 = (1,1,1), \mathbf{f}_2 = (1,0,3)$ och $\mathbf{f}_3 = (1,0,0)$.

Vi får att $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1/|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Nu,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_2 - \langle\mathbf{e}_1|\mathbf{f}_2\rangle\mathbf{e}_1$$

$$
\begin{aligned}
&= (1,0,3) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,3) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\
&= (1,0,3) - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (1,1,1) \\
&= (-1,-4,5)/3
\end{aligned}
$$

Normerar vi denna vektor får vi att $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}(-1,-4,5)$. Vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är nu alltså en ON-bas för U. Fortsätter vi, ett steg till i algoritmen, får vi slutligen en ON-bas för $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (1,0,0) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\
&- \left\langle \frac{1}{\sqrt{42}}(-1,-4,5) \middle| (1,0,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{42}}(-1,-4,5) \\
&= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{42}(-1)(-1,-4,5) \\
&= (42,0,0) - (14,14,14) + (-1,-4,5) \\
&= (27,-18,-9)/42
\end{aligned}
$$

Normerar vi denna vektor får vi slutligen $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,-1)$. Vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ utgör alltså en ON-bas i $\mathbb{R}^3$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ spänner upp rummet U.

Lösning. 83

Vi följer uppmaningen, och börjar med Gram-Schmidt på $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0)$ och $\mathbf{f}_2 = (1,1,1,1)$. Eftersom den första vektorn redan har längd 1, så får vi $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$. Nu,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1 \\
&= (1,1,1,1) - \langle (1,0,0,0) | (1,1,1,1) \rangle (1,0,0,0) \\
&= (1,1,1,1) - 1 \cdot (1,0,0,0) \\
&= (0,1,1,1).
\end{aligned}
$$

Normerar vi denna vektor fås $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,1)/\sqrt{3}$. Om vi nu utvidgar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$, så kan vi skriva $\mathbf{u} = (1,0,0,-2)$ som $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4$. Den ortogonala projektionen på U innebär att vi endast har med de komponenter som finns i U, nämligen $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$. Sats 12.4 ger nu att $a_1 = \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle$ och $a_2 = \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle$. Vi får då att $a_1 = \langle (1,0,0,0) | (1,0,0,-2) \rangle = 1$ samt $a_2 = \left\langle (0,1,1,1)/\sqrt{3} \middle| (1,0,0,-2) \right\rangle = -2/\sqrt{3}$. Det följer att

$$\mathbf{u}_{proj} = 1\mathbf{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0) - \frac{2}{3}(0,1,1,1) = \left(1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Vi är nu klara.

Lösning. 84

Första steget är att finna en bas för $U \cap V$. Detta ställer vi upp med gauss-elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \text{Fixa raderna 1 och 2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera mha rad 2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \text{Fixa raderna 3 \& 4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Vi ser att $\mathbf{f}_1 = (0,-2,0,-2)$ spänner upp $U \cap V$. Om vi nu sätter $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0)$ så spänner $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ upp U. Vektorerna i vänsterledet ovan spänner upp $U+V$ och den tredje radvektorn i VL är linjärt oberoende från $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. Om vi då sätter $\mathbf{f}_3 = (0,0,1,0)$ så spänner $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ upp $U+V$.

Utför vi Gram-Schmidt på vektorerna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ samt en till vektor, får vi på samma gång alla ON-baser som eftersöks.

Normerar vi $\mathbf{f}_1$ får vi $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1 \\ &= (1,0,0,0) - \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \middle| (1,0,0,0) \right\rangle}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \\ &= (1,0,0,0)\end{aligned}$$

Denna vektor har längd 1, så vi kan då sätta $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0)$. Tredje vektorn fås genom att utvidga med $\mathbf{f}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_1 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_2 \\ &= (0,0,1,0)\end{aligned}$$

och här har vi också tur med beräkningarna, det visade sig att $\mathbf{f}_3$ redan var vinkelrät mot $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Vi sätter då $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, som är normerad.

Slutligen, för att utvidga $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till en bas för $\mathbb{R}^4$ så behöver vi utföra Gram-Schmidt på en fjärde vektor. Vi väljer $\mathbf{f}_4 = (0,0,0,1)$ som är ortogonal mot både $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ och detta underlättar beräkningarna:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{f}_4 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_1 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_4 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_2 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{f}_4 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_4 &= (0,0,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \middle| (0,0,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \\ &= (0,0,0,1) - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (0,-1,0,-1) \\ &= (0,0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,0,1)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(0,-1,0,1).$$

Normerar vi denna vektor, får vi $\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$. Sammanfattningsvis, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ och $\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$ där $\mathbf{e}_1$ är en ON-bas för $U \cap V$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är en ON-bas för U, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är en ON-bas för $U + V$ och $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

Lösning. 85

Vi använder Gram-Schmidt på kolonnerna $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_4$ i A. Först, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}_1/|\mathbf{f}_1| = (1,1,0)/\sqrt{2}$.

Som andra steg får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{v}_1 \\
&= (-1,-1,1) - \left\langle \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \middle| (-1,-1,1) \right\rangle \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \\
&= (-1,-1,1) - \frac{1}{2}\langle (1,1,0) | (-1,-1,1) \rangle (1,1,0) \\
&= (-1,-1,1) - \frac{(-2)}{2}(1,1,0) \\
&= (-1,-1,1) + (1,1,0) \\
&= (0,0,1)
\end{aligned}$$

Denna vektor är redan normerad, och vi får $\mathbf{v}_2 = (0,0,1)$.

Vi går vidare,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{v}_2 \\
&= \mathbf{f}_3 - \left\langle \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \middle| (i,-1,1) \right\rangle \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} - \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{v}_2 \\
&= (i,-1,1) - \frac{i-1}{2}(1,1,0) - \langle (0,0,1) | (i,-1,1) \rangle (0,0,1) \\
&= (i,-1,1) - \frac{i-1}{2}(1,1,0) - (0,0,1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (i, -1, 0) + \frac{1-i}{2}(1, 1, 0) \\
&= (1+i, -(1+i), 0)/2
\end{aligned}
$$

Slutligen, $|\mathbf{w}_3| = \frac{1}{2}\sqrt{|1+i|^2 + |-(1+i)|^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2} = 1$. Vektorn $\mathbf{w}_3$ är alltså redan normerad, och vi har $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3$. Vi har nu hittat en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ och vi ställer upp dessa som kolonner i en matris Q:

$$
Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

För att finna R, använder vi att $A = QR \Leftrightarrow Q^H A = R$. Detta ger (notera konjugaten) att

$$
\begin{aligned}
R &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1-i}{2} & -\frac{1-i}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

En QR-uppdelning för A ges då av

$$
A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{R}.
$$

Lösning. 86

Vi har tre rader, alltså måste Q vara en 3×3-matris. Eftersom vi bara har en kolonn $\mathbf{f}_1$, måste vi lägga till två extra vektorer, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$. Vi väljer dessa till $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 0)$. Det är lätt att kontrollera att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ är linjärt oberoende. Vi utför Gram-Schmidt och låter $\mathbf{v}_1$ vara normailseringen av $\mathbf{f}_1$, så $\mathbf{v}_1 = (i,i,1)/\sqrt{3}$. Nu,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{v}_1 \\
&= \mathbf{f}_2 - \left\langle \frac{(i,i,1)}{\sqrt{3}} \middle| (1,0,0) \right\rangle \frac{(i,i,1)}{\sqrt{3}} \\
&= \mathbf{f}_2 - \frac{1}{3} \langle (i,i,1) | (1,0,0) \rangle (i,i,1) \\
&= \mathbf{f}_2 - \frac{-i}{3} (i,i,1) \\
&= (1,0,0) + \frac{1}{3}(-1,-1,i) \\
&= \frac{1}{3}(2,-1,i)
\end{aligned}$$

Detta ger oss att $\mathbf{v}_2 = (2,-1,i)/\sqrt{6}$, eftersom $|(2,-1,i)| = \sqrt{6}$.

Slutligen, tredje vektorn beräknas genom

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{v}_2 \\
&= \mathbf{f}_3 - \frac{1}{3} \langle (i,i,1) | (0,1,0) \rangle (i,i,1) - \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{v}_2 \\
&= \mathbf{f}_3 - \frac{-i}{3}(i,i,1) - \frac{1}{6} \langle (2,-1,i) | (0,1,0) \rangle (2,-1,i) \\
&= \mathbf{f}_3 - \frac{-i}{3}(i,i,1) - \frac{-1}{6}(2,-1,i) \\
&= \frac{1}{6}(0,6,0) + \frac{1}{6}(-2,-2,2i) + \frac{1}{6}(2,-1,i) \\
&= \frac{1}{6}(0,3,3i)
\end{aligned}$$

Normalisering ger att $\mathbf{v}_3 = (0,1,i)/\sqrt{2}$. Detta ger oss till sist

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ och } R = Q^H A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Vi är nu klara. [33]

Lösning. 87

Vi har vektorerna $\mathbf{f}_1 = x$ och $\mathbf{f}_2 = x^2$. Genom Gram-Schmidts process kan vi svara på första frågan.

Först måste vi normera $\mathbf{f}_1$. Detta görs genom att beräkna

$$|\mathbf{f}_1|^2 = \langle \mathbf{f}_1 | \mathbf{f}_1 \rangle = \int_0^1 x \cdot x dx = \frac{1}{3}.$$

Alltså gälller det att $|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vi sätter då $\mathbf{e}_1 = \sqrt{3}x$.

I andra steget, sätter vi

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1 &= x^2 - \left\langle \sqrt{3}x \middle| x^2 \right\rangle \sqrt{3}x \\ &= x^2 - 3 \left(\int_0^1 x \cdot x^2 dx \right) x = x^2 - \frac{3}{4}x\end{aligned}$$

Vi måste nu normera $\mathbf{v}_2$.

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}_2|^2 = \left\langle x^2 - \frac{3}{4}x \middle| x^2 - \frac{3}{4}x \right\rangle &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 x^4 - \frac{3x^3}{2} + \frac{9x^2}{16} dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{9x^3}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{80}.\end{aligned}$$

Alltså, $\mathbf{e}_2 = \sqrt{80} \left(x^2 - \frac{3}{4}x \right)$.

---

[33] Notera att R är övertriangulär, med icke-negativa reella tal på huvuddiagonalen. Detta krävs i en QR-uppdelning.

Sammanfattningsvis, vektorerna $\sqrt{3}x$ och $\sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)$ är alltså en ON-bas för U. Vi kan nu använda oss av att

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_i,$$

om $\mathbf{e}$ är en ON-bas, för att bestämma projektionen av $\mathbf{u} = 1 + 2x$ på U. Vi har helt enkelt att denna projektion ges av $\mathbf{u}_{proj} = \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_2$, där

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_1 &= \left\langle \sqrt{3}x \middle| 1 + 2x \right\rangle \sqrt{3}x \\ &= 3 \left(\int_0^1 x(1+2x)dx \right) \cdot x \\ &= 3 \cdot \frac{7}{6}x \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_2 &= \left\langle \sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \middle| 1 + 2x \right\rangle \sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \\ &= 80 \left(\int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)(1+2x)dx \right) \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \\ &= 80 \cdot \frac{41}{24} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \end{aligned}$$

Förenklar vi nu $\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_2$ får vi att $\mathbf{u}_{proj} = \frac{410x^2}{3} - 99x$.

Lösning. 88

Låt oss kalla avbildningsmatrisen till T i den givna basen för A. Vi vet då att $A(1,0,0,0)^T = A(1,0,2,0)^T = (0,0,0,0)^T$ och att $A(1,1,1,1)^T = (1,1,1,1)^T$ samt att $A(1,1,-1,-1)^T = 2(1,1,-1,-1)^T$. Detta kan sammanfattas som

$$A\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&2&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&2\\0&0&1&-2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

Vi löser ut A genom att beräkna en matrisinvers och får att

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&2\\0&0&1&-2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Från denna matris kan vi nu beräkna allt som efterfrågas.

Vi kan dock vara lite effektivare och inse att vektorerna $(1,0,0,0)$, $(1,0,2,0)$, $(1,1,1,1)$ samt $(1,1,-1,-1)$ är linjärt oberoende. De två första vektorerna ligger i A:s nollrum, ty de avbildas på nollvektorn. De två sistnämnda måste då spänna upp A:s värderum. Det är klart att vi inte kan ha högre dimension än två för A:s värderum, eftersom A:s nollrum har minst dimension två.

Genom att fundera lite, eller använda Gram-Schmidt inser vi att vektorerna $(1,0,0,0)$ och $(0,0,1,0)$ spänner upp A:s nollrum och är en ON-bas för detta rum. På liknande sätt finner vi att vektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$ är en ON-bas för A:s värderum.

För att svara på fråga (b), noterar vi att

$$(20,2,-30,0)=33(1,0,0,0)-15(1,0,2,0)+(1,1,1,1)+(1,1,-1,-1)$$

Det följer då att

$$\begin{aligned}T(20,2,-30,0)&=33T(1,0,0,0)-15T(1,0,2,0)\\&\quad+T(1,1,1,1)+T(1,1,-1,-1)\\&=0-15\cdot 0+(1,1,1,1)+2(1,1,-1,-1)\\&=(3,3,-1,-1).\end{aligned}$$

Lösning. 89

Kalla matrisen för A. Vi bestämmer först $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & i & 0 \\ -i & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} -i & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2+\lambda-1) - (-1-\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \end{aligned}$$

Vi gissar på rötter, och får att $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ samt $\lambda_3 = 1$ är matrisens egenvärden. Vi letar även efter egenvektorer, som vi normerar. Dessa egenvektorer ger kolonnerna i U.

Matrisen diagonaliseras då som $A = UDU^{-1} = UDU^H$, med

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. 90

Vi bestämmer först det karakteristiska polynomet.

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - i(-i)) = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Vi letar nu efter egenvektorer som hör till egenvärdena $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 4$. I första fallet söker vi en ON-bas i egenrummet $\ker(A - 2I)$. Först måste vi hitta en bas att utgå ifrån. Vi löser då systemet $(A-2I)\mathbf{x} = 0$ och får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \end{array}\right)$$

När vi har ett dubbelt egenvärde till en matris som vi vet är diagonaliserbar, så är motsvarande egenrum tvådimensionellt. Vi behöver nu två linjärt oberoende vektorer [34] som utgör en bas för detta rum. Till exempel får vi vektorn $\mathbf{f}_1 = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{f}_2 = (1, 1, i)$. Kontrollera att dessa löser ekvationen ovan.

Vi ser dock att $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ inte är ortogonala eller normerade. Därför måste vi utföra Gram-Schmidt på dessa. Vektorn $\mathbf{f}_1$ är redan normerad, så vi låter $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$. Nästa steg i Gram-Schmidt ger att

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{v}_1 \\ &= (1, 1, i) - \langle (0, 1, 0) | (1, 1, i) \rangle (0, 1, 0) \\ &= (1, 1, i) - (0, 1, 0) \\ &= (1, 0, i).\end{aligned}$$

Normering av $\mathbf{w}_2$ ger slutligen $\mathbf{v}_2 = (1, 0, i)/\sqrt{2}$.

Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ utgör således en ON-bas i egenrummet med egenvärde 2.

På liknande sätt som ovan, kan vi hitta en tredje egenvektormed egenvärdet 4, som vi normerar. Detta ger oss $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -i)/\sqrt{2}$.

Sätter vi upp egenvektorerna nu som kolonner i en matris U, så blir denna matris unitär, och den diagonaliserar A. Alltså, $A = UDU^H$, och D är diagonalmatrisen med egenvärden motsvarande egenvektorerna.

$$A = UDU^H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Lösning. 91

Lösning saknas.

[34] Vi kan såklart parametrisera lösningsrummet och få fram en bas därifrån, men här använder vi en liten annan metod för att illustrera att man ibland måste göra om basen till en ON-bas.

Lösning. 92

Vi börjar med att beräkna $B = A^H A$, och får att

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till matrisen B ges då av lösningarna till $(5-\lambda)^2 - 4^2 = (5-\lambda+4)(5-\lambda-4)$. Detta ger oss $\lambda_1 = 9$ samt $\lambda_2 = 1$. De singulära värdena är då $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$ och $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$. Vi går vidare med att bestämma egenvektorerna till B för att kunna skapa den unitära matrisen V. Egenvärdet $\lambda = 9$ leder till systemet $B - 9I = 0$, vilket på matrisform blir

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Löser vi detta system, får vi att lösningsrummet spänns upp av vektorn $(1,1)$, som då blir en egenvektor till B. Normerar vi denna vektor, $\mathbf{v}_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, får vi första kolonnen i V.

Vi kan finna den andra egenvektorn, som hör till $\lambda_2 = 1$, på samma sätt, men vi vet att egenvektorerna skall utgöra en ON-bas. Ett alternativ vi kan se direkt är då $\mathbf{v}_2 = (-1,1)/\sqrt{2}$. Matrisen V ges då av

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Det återstår att bestämma matrisen U. För $i = 1,2$ har vi att $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$. Beräkning av dessa vektorer ger

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa vektorer är nu normerade och ortogonala. För att hitta $\mathbf{u}_3$ måste vi nu använda Gram-Schmidt, för att utvidga $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ till en ON-bas för hela $\mathbb{C}^3$. Vi väljer att utvidga med $\mathbf{f}_3 = (1,0,0)$ eftersom den är ortogonal mot $\mathbf{u}_2$ och detta underlättar beräkningarna. Nu,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{u}_1 - \underbrace{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle}_{=0} \mathbf{u}_2 \\
&= (1,0,0) - \left\langle \frac{(4,-1,-1)}{3\sqrt{2}} \middle| (1,0,0) \right\rangle \frac{(4,-1,-1)}{3\sqrt{2}} \\
&= (1,0,0) - \frac{1}{18} \langle (4,-1,-1) | (1,0,0) \rangle (4,-1,-1) \\
&= (1,0,0) - \frac{4}{18}(4,-1,-1) \\
&= (1,2,2)/9.
\end{aligned}$$

Normering av $\mathbf{w}$ ger att $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ utgör kolonnerna i U, och en SV-uppdelning av A ges då av

$$A = USV^H = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Lösning. 93

Vi börjar med att beräkna $A^H A$. Denna matris blir

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer nu egenvärdena till denna matris.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -2i \\ 0 & 2i & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2i \\ 2i & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -2i \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(4-\lambda) - 4\right] - 4(4-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 7\lambda + 8\right] - 16 + 4\lambda \\
&= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda \\
&= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6).
\end{aligned}$$

De singulära värdena ges då av $\sigma_1 = \sqrt{6}$ och $\sigma_2 = \sqrt{3}$. Vi fortsätter med att bestämma egenvektorerna till $A^H A$, eftersom dessa kommer att ge oss kolonnerna i matrisen V.

Egenvärder $\lambda_1 = 6$ leder till ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{array}\right).$$

Detta leder till att egenrummet till egenvärdet $\lambda_1 = 6$ spänns upp av den normerade vektorn $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}(1, -2, -2i)$. För $\lambda_2 = 3$ gör vi på samma sätt, och får $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(2, -1, 2i)$ och $\lambda_3 = 0$ ger till sist $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}(2, 2, -i)$. Matrisen V är då

$$V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2i & 2i & -i \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu bestämma $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ genom formeln $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$. Detta leder till att $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2i, 1)$ och $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, 1)$. Den tredje vektorn måste nu bestämmas med Gram-Schmidt, eller så försöker man "se" en vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Detta leder till $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. Verifiera nu att $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ verkligen är en ON-bas. Dessa ger nu kolonnerna i matrisen U och slutligen kan matrisen A presenteras som

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2i \\ 2 & -1 & -2i \\ 2 & 2 & i \end{pmatrix}}_{V^H}.$$

Detta är en singulärvärdesuppdelning [35] av A.

[35] Notera att det är viktigt att sortera de singulära värdena i S avtagande i storlektsordning, och att man måste tänka på att ordningen på kolonnvektorerna i V och U bestäms av ordningen på de singulära värdena.

Lösning. 94

Direkt beräkning ger att

$$AA^H = A^H A = \begin{pmatrix} 53 & 0 \\ 0 & 53 \end{pmatrix}.$$

Detta visar att A är normal. Nästa steg är att finna A:s egenvärden. Beräkning ger att

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-6i-\lambda & 2-3i \\ -2-3i & 2+6i-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda-6i)(2-\lambda+6i) - (-3i+2)(-3i-2) \\ &= \text{ (konjugatregeln två gånger)} \\ &= (2-\lambda)^2 - (6i)^2 - ((-3i)^2 - 2^2) \\ &= (2-\lambda)^2 + 49 \\ &= (2-\lambda)^2 - (7i)^2 \\ &= \text{ (konjugatregeln)} \\ &= (2-\lambda-7i)(2-\lambda+7i) \\ &= ((2-7i)-\lambda)((2+7i)-\lambda). \end{aligned}$$

Egenvärdena till matrisen ges då av $\lambda_{1,2} = 2 \pm 7i$. Vi behöver nu finna motsvarande egenvektorer. Fallet $\lambda_1 = 2-7i$ ger systemet $(A-\lambda_1 I)\mathbf{x} = 0$ som då ges av

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 2-3i & 0 \\ -2-3i & 13i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3-2i & 0 \\ -2-3i & 13i & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3-2i & 0 \end{array}\right).$$

En egenvektor ges då av $\mathbf{w}_1 = (3+2i, 1)$. Vi ser att $|\mathbf{w}_1|^2 = |3+2i|^2 + |1|^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$. Den normerade egenvektor blir då $\mathbf{u}_1 = (3+2i, 1)/\sqrt{14}$. Fallet $\lambda_2 = 2+7i$ leder till

$$\left(\begin{array}{cc|c} -13i & 2-3i & 0 \\ -2-3i & -i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 3+2i & 0 \end{array}\right).$$

Vektorn $\mathbf{w}_2 = (3+2i, -13)$ löser ekvationssystemet, och $|\mathbf{w}_2|^2 = |3+2i|^2 + |-13|^2 = 3^2 + 4^2 + 13^2 = 182$. Normering ger oss $\mathbf{u}_2 = (3+2i,-13)/\sqrt{182}$. Här kan det vara bra att kontrollera att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ verkligen är ortogonala, för att upptäcka eventuella räknefel:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 182}} \langle (3+2i, 1) | (3+2i, -13) \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 182}} \left((3-2i)(3+2i) - 13 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 182}} \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Villkoret är upppfyllt, vi kan nu ställa upp de normerade egenvektorerna som kolonner i U och har då

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3+2i}{\sqrt{14}} & \frac{3+2i}{\sqrt{182}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{13}{\sqrt{182}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-7i & 0 \\ 0 & 2+7i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3-2i}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3-2i}{\sqrt{182}} & -\frac{13}{\sqrt{182}} \end{pmatrix}.$$

Lösning. 95

Exempelvis matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Lösning. 96

Egenvärden till matrisen är $5, 4, -1$ så största värde blir $5 \cdot 16 = 80$, minsta värde -16.

Lösning. 97

Den är inte positivt definit, alla egenvärden är inte positiva om signaturen är $(4, 0)$. Matrisen är positivt semidefinit.

Lösning. 98

För $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ uppfyller den hermitiska formen $f(\mathbf{x}) = 5|x_1|^2 - 4|x_2|^2$ de sökta egenskaperna.

18. Errata till Kompendiet upplaga 2012

Här är ett fåtal av de tryckfel som finns i kursboken:

- s. 64 Uppgift 3.14 skall lyda "Let $a_{ij} = 1$ if $i < j - 1$ ...".
- s. 92 Beviset på Sats 5.4, andra meningen, "Now if $Aw_1, \ldots, Aw_m$ ...".
- s. 94 Punkt 5 i Sats 5.5, byt ut "zeros" mot "columns".
- s. 112 I uppgift 5.6, "...$A = XY^T$ for some *non-zero* column vectors ...".
- s. 114 Facit fattas till 5.5 d). Svaret är 1.
- s. 121 Fel i determinanten innan Corollary 6.6. Det skall inte stå $\lambda - 2$ utan bara -2.
- s. 245 Näst sista meningen i beviset av 12.2, lägg till ordet *one*.
- s. 255 I Sats 12.10 skall sista punkten vara $(cA)^* = \overline{c}A^*$.
- s. 261 I facit till 12.12, 12.13 stämmer ej, då R skall ha positiva pivotelement.
- s. 266 Gram-Schmidt i exemplet använder inte samma skalärprodukt som är definierad tidigare. Inkonsekvent notation.
- s. 267 I Sats 13.3 sista punkten, skall det vara "$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i U_i V_i^H$ ...".
- s. 276 I Sats 13.6, läs alla U^{-1} som U^H etc. då alla inverser vi beräknar är på unitära matriser. Notera även att vi kan behöva *komplexa* egenvärden även då en reell matris Schur-uppdelas.
- s. 279 Facit, 13.1, S^2 är odefinierat, då S är rektangulär matris. SS^H är det som avses.
- s. 279 Facit, 13.6, det bör vara absolutbelopp runt v_i.
- s. 287 Det bör stå $\hat{A} \leftrightarrow S^{-1}AS$ och $\hat{A} \leftrightarrow S^H AS$ på mitten av sidan.
- s. 291 Sats 14.4, "matrix" står med en gång för mycket.
- s. 294 Sats 14.5, punkt 3 och 4, "the positive numbers" bör vara "positive numbers" och "a positive numbers" skall vara "positive numbers".