EXEMPEL OCH LÖSNINGAR I LINJÄR ALGEBRA II

PER ALEXANDERSSON

Sammanfattning. Detta är en samling kompletterande uppgifter till *Linjär Algebra II för lärare*, eller annan linkande kurs.

Exemplen är av varierande svårighetsgrad och till vissa problem ges enbart svar. Notera att det finns alternativa lösningar med alternativa korrekta svar till många av uppgifterna. Vissa av problemen är hämtade från gamla tentor vid Stockholms Universitet, och är namngivna med datumreferens. Övriga problem har givits andra namn, använd dessa för att hänvisa till ett problem.

Texten uppdateras kontinuerligt i diskreta steg, förslag på förbättringar mottages gärna på `per.w.alexandersson@gmail.com`, och en uppdaterad version kommer finnas tillgänglig inom senast ett par dagar.

Version: 28. mars 2018,21:08.

Innehåll

1. Definitioner och standardproblem

Dessa defintioner är bland de viktigaste och skall kunna förklaras: *vektorrum, underrum, linjär avbildning, nollrum, värderum, dimension, rang, determinant, skalärprodukt, ortogonala vektorer, egenvärde, egenvektor, karakteristisk ekvation.*

Följande typer av problem är vanligt förekommande, du bör utan att tveka veta precis hur man löser dessa typer av problem vid kursens slut.

- Beräkna determinanten av en större matris, 3×3, 4×4, och även om det förekommer obekanta variabler i matrisen.
- Bestämma rangen av en matris.
- Kunna avgöra om en uppsättning vektorer är linjärt oberoende eller inte.
- Bland en mängd vektorer som spänner upp ett linjärt delrum, välja ut vektorer som utgör en bas för detta rum.
- Utöka en bas för ett delrum till en bas för hela rummet.
- Bestämma en bas för $U + W$ samt $U \cap W$, där $U, W \subseteq V$.
- Givet en matris, bestämma en bas för radrum, kolonnrum, samt nollrum.
- Invertera en matris av storlek 2×2, 3×3 och större.
- Bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
- Diagonalisera kvadratiska matriser och avbildningar.
- Finna en ON-bas till ett delrum, och utöka till en ON-bas för hela rummet.

2. Determinanter & rang

Determinanten är ett tal som man associerar till en kvadratisk matris. Detta tal kan för 2×2-och 3×3-matriser tolkas som den area eller volym, som radvektorerna (eller kolonnvektorerna) spänner upp. Det är också ett tecken med, som säger något om orienteringen av vektorerna som ingår. För större matriser kan man försöka tänka sig en liknande tolkning.

Viktigaste egenskapen är att determinanten är 0 om och endast om raderna (och då samtidigt kolonnerna) är linjärt beroende. Precis då detta sker kan matrisen inte inverteras.

Rangen av en matris (behöver inte vara kvadratisk) är antalet linjärt oberoende rader. Det är också antalet linjärt oberoende kolonner, och antalet pivotelement efter att man gausseliminerat tills matrisen är på trappstegsform. Detta begrepp är mycket viktigt i många tillämpningar, rangen av en matris är i någon mening ett mått på hur mycket information som finns lagrat i matrisen.

Problem. 1 (Delina)
Beräkna följande determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Problem. 2 (Denise)
Beräkna följande determinant

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & x^2 & x & x+1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Problem. 3 (Diana)
Beräkna följande determinanter:

$$(a)\ \begin{vmatrix} x & 4 & 0 \\ 2 & x-1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (b)\ \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (c)\ \begin{vmatrix} 100 & 200 & 250 & 101 \\ 100 & 200 & 101 & 102 \\ 101 & 200 & 99 & 101 \\ 99 & 199 & 100 & 102 \end{vmatrix}$$

Problem. 4 (det-2004-01-09:1)
Lös följande ekvation

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problem. 5 (det-2004-03-16:1)
Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 1 & 2 & 4 & 3x \\ 1 & 3 & 9 & 2x \\ 1 & x & x^2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Problem. 6 (det-2003-01-10:2)
Låt n vara godtyckligt positivt heltal. Bestäm alla tal $x \in \mathbb{R}$ så att determinanten nedan blir 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 4-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-x \end{vmatrix}.$$

Problem. 7 (rank-2003-03-18:4)
Bestäm för alla reella a, rangen till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 8 (Rebecca)
Bestäm rangen för följande matriser

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -9 & 14 & -4 \end{pmatrix}\ (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 4 & -1 & 14 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Förklara varför du fick samma rang för båda matriserna.

Problem. 9 (Angelica)
Beräkna följande produkt

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

genom att först transponera båda leden, och sedan utföra en modifierad metod av matrisinvertering.

Detta är en tillämpning med modifikation av uppgift 2.10 i *Matrix Theory* av Holst & Ufnarovski.

Problem. 10 (Rosita)
En kvadratisk matris A sägs vara nilpotent om det finns ett heltal $k > 0$ så att $A^k = 0$.

(a) Finn en matris A av ordning 4×4 som uppfyller att $\operatorname{rank} A = 3$, $\operatorname{rank} A^2 = 2$, $\operatorname{rank} A^3 = 1$ och $\operatorname{rank} A^4 = 0$.
(b) Kan vi konstruera en 4×4-matris B så att $\operatorname{rank} B = 4$ men $\operatorname{rank} B^2 = 3$?

Problem. 11 (Rosalina)
Matrisen C_n är av ordning $2n \times 2n$ och ges av $(\delta_{ij} + 2\delta_{i,2n-j+1})_{ij}$. Till exempel,

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm ett uttryck för $|C_n|$.

3. Linjära rum och underrum

Linjära rum är ett centralt begrepp i linjär algebra. Det är viktigt att lära sig känna igen dessa. Lättast är att bekanta sig med några välkända sådana rum så som $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, rummet av polynom, rummet av matriser av fix storlek, etc. För att avgöra om en mängd är ett delrum till något av ovanstående räcker det att visa att denna mängd är sluten under addition och multiplikation med skalär.

Om alla vektorer i ett linjärt rum V kan uttryckas som en linjärkombination av vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ säger man att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *spänner upp* V.

Allmänt så ger en uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ alltid upphov till ett delrum $U \subseteq V$ kallat det *linjära höljet* till $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, och ges av alla vektorer $\mathbf{u} \in V$ som kan skrivas (på minst ett sätt) som

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots \lambda_n \mathbf{v}_n \text{ med } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ spänner upp V, så är även V det linjära höljet till $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ och tvärt om.

Om enda lösningen till

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$$

ges av $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ är $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linjärt oberoende. En linjärt oberoende mängd vektorer som spänner upp ett vektorrum V kallar vi för en *bas* till V. Antalet basvektorer som krävs för att spänna upp V är V:s *dimension*.

Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en bas till V, så finns det för varje vektor $\mathbf{u} \in V$ en unik lösning till ekvationen (egentligen ett ekvationssystem)

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{u}.$$

Talen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ som löser denna ekvation kan sättas in i en vektor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ och denna vektor kallas för *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{u}$ i basen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

När vi väl fixerat en bas, så kommer addition av vektorer och multiplikation med skalär av vektorer i V översättas till exakt samma operationer på motsvarande koordinatvektorer, som lever i något $\mathbb{R}^n$. Alla ändligtdimensionella vektorrum uppför sig alltså i praktiken som $\mathbb{R}^n$, en mycket viktig princip.

De vanligare vektorrummen kommer med en naturlig *standardbas*, vilket är den bas som man skall utgå ifrån om inget annat anges. Följande är vektorrum med tillhörande standardbas:

- $\mathbb{R}^n$, standardbas $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, och så vidare till $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.
- Rummet av polynom av grad maximalt n, $P_n(\mathbb{R})$, har basen $1, x, x^2, \ldots, x^n$ som standardbas.
- Rummet av $2 \times 2-$matriser, $M_2(\mathbb{R})$ har standardbasen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ samt } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Du kan själv generalisera denna bas till andra matrisstorlekar.

Givet en $m \times n$-matris A, så finns det några vanliga vektorrum som associeras till denna matris.

- A:s *nollrum (även kallat kärna)* (delrum i $\mathbb{R}^m$) som ges av alla vektorer $\mathbf{v}$ som löser $A\mathbf{v} = 0$. Betecknas $\ker A$.
- A:s *kolonnrum (även kallat bildrum eller värderum)* (delrum i $\mathbb{R}^m$) som ges av det linjära höljet av kolonnerna i A. Betecknas $\operatorname{Im} A$.

- A:s *radrum* (delrum i $\mathbb{R}^n$) som ges av det linjära höljet av raderna i A.

Många problem som har med linjärt beroende och oberoende vektorer kan formuleras i termer av dessa delrum. Flera av dessa delrum dyker dessutom upp naturligt när vi senare studerar linjära avbildningar.

Problem. 12 (Valentina)
Låt V vara rummet av polynom av grad max 2. Visa att polynomen $1+x$, x^2-1 och $2x$ utgör en bas i detta rum, och bestäm koordinaterna för polynomet x^2+3x+2 i denna bas.

Problem. 13 (Victoria)
Betrakta mängden V av vektorer (x,y,z) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller att $x+y+z=0$. Visa att V är ett vektorrum, samt bestäm en bas och dimension för detta rum.

Problem. 14 (Viola)
Låt V vara mängden av reella 2×3-matriser på formen $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ -b & a & c \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Visa att V är ett delvektorrum till rummet av 2×3-matriser.
(b) Finn en bas och dimension för V.
(c) Bestäm koordinaterna för matrisen $\left(\begin{smallmatrix} 2 & \pi & 42 \\ -\pi & 2 & 42 \end{smallmatrix}\right)$ i den bas du fann i (b).

Problem. 15 (Vilma)
Vilka av följande delmängder till $\mathbb{R}^3$ är vektorrum?

(a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x+y+2z=0\}$
(b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x^2=y\}$
(c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x+y+z=1\}$
(d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x+y=0 \text{ och } y+z=0\}$

Problem. 16 (Pamela)
Visa att polynomen $1, x+1$ och x^2+x+1 är en bas för mängden av polynom av grad maximalt 2, och bestäm koordinaterna för ett godtycklig polynom $c_1+c_2x+c_3x^2$ i denna bas.

Problem. 17 (Petronella)
Visa att mängden V av polynom med reella koefficienter och grad maximalt 3 är ett vektorrum. Visa att mängden U av polynom i V ovan som uppfyller att $p(0)=0$ är ett delvektorrum till V. Finn en bas för U och utvidga till en bas för V.

Problem. 18 (Vanessa)
Mängden V av reella $2\times 2-$matriser är ett vektorrum. Visa att matriser $A\in V$ som uppfyller $BA=0$ är ett delvektorrum, där matrisen $B=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Bestäm en bas och dimension för detta delrum.

Problem. 19 (Vendela)
Bestäm en bas för radrummet, nollrummet och värderummet till matrisen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problem. 20 (Beatrice)
Bestäm en bas för kolonnrummet och radrummet till var och en av matriserna nedan. Bestäm också baser för nollrummet och värderummet till de linjära avbildningar vars matriser i standardbasen ges av matriserna. Slutligen bestäm rangen av var och en av matriserna.

(a) (2003-08-15:2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2004-10-19:1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 6 & 12 & -3 \\ -2 & 6 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

(c) (2005-01-11:1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Problem. 21 (Bella)
Bestäm en bas för det linjära rum U som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 2)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, 3, -7)$, och $(7, 2, 8)$ genom att beräkna en bas för

(a) radrummet
(b) kolonnrummet

till en lämplig matris.

Problem. 22 (Bianca)
Vektorerna $(1, 3, -1, -1)$ och $(0, 2, 1, 2)$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$. Utvidga dessa vektorer till en bas för $\mathbb{R}^4$.

Problem. 23 (Belinda)
Vektorrummet $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av det linjära höljet av $(1, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$ och $(3, 2, 1)$. Vektorrummet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av det linjära höljet av $(-1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ och $(2, 3, 5)$. Bestäm en bas för $U + V$ och $U \cap V$.

Problem. 24 (Betty)
Finn en bas för $U + V$ och $U \cap V$ där U och V ges av

(a) $U = \langle (1, 0, 1), (1, 2, 1) \rangle$, $V = \langle (1, 0, 4), (1, 0, -4) \rangle$ i $\mathbb{R}^3$.
(b) $U = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$, $V = \langle (1, 0, 4, 0), (3, 0, -4, 1) \rangle$ i $\mathbb{R}^4$.
(c)

$$U = \langle (1, 2, -1, -2), (4, -3, 1, 2), (11, 0, -1, -2) \rangle,$$
$$V = \langle (3, -5, 2, 4), (10, -13, 5, 10) \rangle$$

delrum i $\mathbb{R}^4$.

(d) $U = \langle(1,0,1),(0,1,2)\rangle$, $V = \langle(1,0,0)\rangle$ i $\mathbb{R}^3$.

Problem. 25 (Barbro)
Bestäm en samling vektorer från M som utgör en bas för det linjära rum som spänns upp av vektorerna i M, där M ges av

(a) $M = \{(1,0,1),(-1,0,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$, i $\mathbb{R}^3$.
(b) $M = \{1+x+x^2, 2-x-2x^2, x+2, 2x^2-3\}$, i $P_2(\mathbb{R})$.
(c) $M = \{(1,1,1,1),(2,1,2,1),(1,2,1,2),(-100,0,-100,0)\}$, i $\mathbb{R}^4$
(d) $M = \{x^2+2x+3, x+1, x^2+1, 2x^2+3x+5, 2x-2x^2, x^2+x\}$, i $P_2(\mathbb{R})$.

Problem. 26 (Adele)
Låt kolonnerna i matrisen A utgöra en bas för ett delrum $U \subseteq V$. Notera att vi då har att $\dim U = \operatorname{rank} A$. Antag att kolonnerna i matrisen B är linjärt oberoende, och att $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$.

(a) Visa att kolonnerna i B också är en bas för U om $\operatorname{rank}(A\ B) = \operatorname{rank} A$, där $(A\ B)$ är matrisen som består av både A:s och B:s kolonner.
(b) Använd metoden ovan för att avgöra om vektorerna

$$(1,2,-1,0),\ (-1,3,2,2) \text{ och } (3,2,-2,1)$$

är en bas för samma rum som vektorerna

$$(4,1,0,5),\ (3,-1,1,5),\ \text{och } (7,-6,7,18)$$

spänner upp.

4. Linjära avbildningar

En stor del av matematiken handlar om olika typer av funktioner mellan olika mängder. Vi skall titta närmare på funktioner som går mellan vektorrum, och som då avbildar vektorer på vektorer. En viktig familj av sådana funktioner (eller avbildningar), kallas för linjära avbildningar och dessa är extra intressanta. En avbildning $F\colon V \to U$ kallas för en *linjär avbildning* om denna uppfyller

$$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \text{ och } F(\lambda\mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{v}).$$

En viktig egenskap hos linjära avbildningar är att om vi vet var basvektorerna (för en viss bas) i V avbildas, så kan vi unikt bestämma avbildningen. Detta leder till att alla linjära avbildningar mellan vektorrum kan beskrivas som en matrismultiplikation. Vi väljer en bas $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ i V samt en bas $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n$ i U. Matrisen A som bestäms av F (med respekt till dessa baser), ges av att kolonn j i A är koordinaterna för $F(\mathbf{e}_j)$ i $\mathbf{f}$-basen.

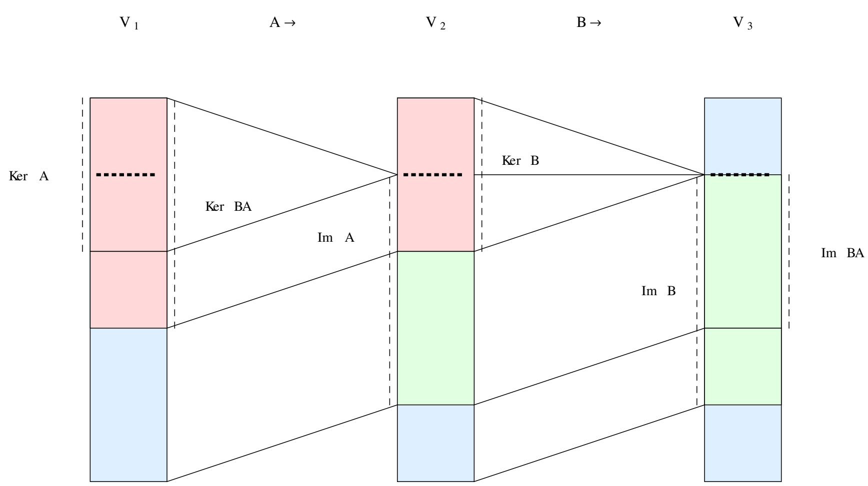
Slutligen, om $\hat{\mathbf{u}}$ är koordinaterna för vektorn $\mathbf{u}$ i $\mathbf{e}$-basen, så kommer då $A\hat{\mathbf{u}}$ vara koordinatvektorn för $F(\mathbf{u})$ i $\mathbf{f}$-basen. Vi kan nu i praktiken arbeta med matrisen A istället för den linjära avbildningen. Nollrum, värderum och rang för en linjär avbildning kan då utläsas i avbildningsmatrisen A.

En linjär avbildning $F : V \to U$ är *injektiv* om $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow F(\mathbf{u}) \neq F(\mathbf{v})$. Detta är ekvivalent med att enda lösningen till $F(\mathbf{v}) = 0$ är $\mathbf{v} = 0$. Avbildningen F är *surjektiv* om $\mathbf{u} = F(\mathbf{v})$ kan lösas för varje $\mathbf{u} \in U$. Detta är ekvivalent med att $\operatorname{Im} F = U$.

Lite intuition: en linjär avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^5$ kan inte vara surjektiv, intuitionen är att vi kan inte med fyra dimensioner täcka ett femdimensionellt rum. Motsvarande, en linjär avbildning från $\mathbb{R}^5$ till $\mathbb{R}^4$ kan inte vara injektiv, vi kan inte "packa in" fem dimensioner i ett fyradimensionellt rum, flera vektorer måste avbildas på samma vektor under en sådan avbildning. Denna princip gälller såklart inte bara fyra och femdimensionella rum; så fort vi avbildar till ett strikt större vektorrum, så kan avbildningen inte vara surjektiv. Avbildar vi till ett mindre vektorrum än det vi utgår ifrån, kan avbildningen inte vara injektiv.

Slutligen, för två linjära avbildningar, $A\colon V_1 \to V_2$ och $B\colon V_2 \to V_3$ kan vi bilda den sammansatta avbildningen BA. Notera att man skriver sammansättningen "baklänges", A är den avbildningen som görs först, därefter utför man B. Förklaringen är att om vi använder motsvarande avbildningsmatriser, så multipliceras matriserna i denna ordning för att bilda den sammansatta avbildningens avbildningsmatris.

För en sådan sammansättning gäller det att $\ker A \subseteq \ker BA$ och $\operatorname{Im} B \supseteq \operatorname{Im} BA$. Intuitionen är att två avbildningar har större möjlighet att avbilda något på nollvektorn, (antingen avbildas en vektor på nollvektorn direkt av A, eller senare av B). För bildrummet är det tvärt om, bilden av B är minst lika stor som den av BA:s, eftersom $\operatorname{Im} B$ är bilden av alla vektorer i V_2, medan $\operatorname{Im} BA$ är bilden av $\operatorname{Im} A$, som kan vara mindre än V_2. Detta illustreras i Figur 1.



Figur 1. Avbildningarna $A\colon V_1 \to V_2$ samt $B\colon V_2 \to V_3$. Här är $\ker BA$ är det delrum i V_1 som under BA avbildas på nollvektorn i V_3, och $\operatorname{Im} BA$ är det delrum i V_3 som kommer från något i V_1. Den tjockstreckade linjen i vardera vektorrum representerar nollvektorn. Notera att bilden är lite missvisande; varje delrum skall innehålla nollvektorn, men att rita 5-dimensionella vektorrum som tvådimensionella figurer har sina begränsingar.

Problem. 27 (Linnea)
Betrakta den linjära avbildningen T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, x + y + z).$$

Bestäm avbildningsmatrisen för T uttryckt i standardbaserna för respektive vektorrum. Är T injektiv eller surjektiv?

Problem. 28 (lin-map-2003-08-15:4)
Låt den linjära avbildningen F på rummet V av 3×1-matriser till sig själv definieras av

$$F\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \text{ samt } F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för F i standardbasen. Standardbasen är vektorerna $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ och $(0, 0, 1)^T$.
(b) Bestäm $F((0, 1, 0)^T)$.
(c) Bestäm en bas för värderummet till F.
(d) Bestäm rangen till F.

Problem. 29 (Lejla)
Bestäm bilden av 1, x och x^2 under följande linjära avbildningar:

(a) $p(x) \mapsto p'(x)$
(b) $p(x) \mapsto p(x - 1)$
(c) $p(x) \mapsto 3p(2x)$
(d) $p(x) \mapsto xp'(x)$

Problem. 30 (Lizette)
Betrakta rummet av polynom av grad maximalt 2, och den linjära avbildningen $T : p(x) \mapsto -p(x - 1)$ som verkar på detta linjära rum. Bestäm avbildningsmatrisen för T i basen $1, x, x^2$.

Problem. 31 (Lilly)
Bestäm avbildningsmatrisen, en bas och dimension för $\ker F$, en bas och dimension för $\operatorname{Im} F$ samt rangen av den linjära avbildningen F som definieras i var och en av deluppgifterna nedan. Avgör också om avbildningen är något av injektiv, surjektiv eller bijektiv.

(a) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ där

$$F\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & a+c\\a-b & a-d\end{pmatrix}$$

med basen
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \text{ samt } \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ med

$$F(1) = x^3 + 1, \quad F(x + 1) = x^2 - 1 \text{ och } F(x^2 + 1) = x - 1,$$

i baserna $\{1, x + 1, x^2 + 1\}$ resp. $\{1, x, x^2, x^3\}$.
(c) $F : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ där $F(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2$, med resp. standardbas.
(d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ där $F(a, b) = a + ib$ med baserna $\{(1, 0), (0, 1)\}$ respektive $\{1, i\}$.

Problem. 32 (Liona)
Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definieras som

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 2x + z, x - 3z).$$

Bestäm en bas för T:s nollrum resp. värderum.

Problem. 33 (Lykke)
Bestäm en bas för $\ker A$, $\operatorname{Im} A$ och radrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Problem. 34 (Leya)
Bestäm en bas för $\ker T$ och $\operatorname{Im} T$ eller avgör om resp. rum är nolldimensionellt, till den linjära avbildningen $T : P_1(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$ där

$$T(p(x)) = xp(2ix) - p(x).$$

Problem. 35 (Lisen)
En linjär avbildning $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definieras av $T(p(x)) = ((x + 1)p(x))''$. Bestäm en bas för nollrummet samt värderummet till den sammansatta avbildningen $T \circ T$. Finns det ett polynom $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$, så att $T(T(p(x)) = x$?

Problem. 36 (Liza)
Låt $V = \{p(x) : \deg p \leq 5\}$ och definiera $T_1, T_2 \colon V \mapsto V$ enligt $T_1(p(x)) = x^5 p(1) + p'(x)$ och $T_2(p(x)) = -5x^4 p(1) + p'(x)$.

(a) Bestäm en bas för V.
(b) Bestäm nollrum och värderum för T_1 och T_2.

Problem. 37 (Liselott)
Låt $V_1 = \mathbb{R}^3, V_2 = \mathbb{R}^3, V_3 = \mathbb{R}^4$. Låt $A : V_1 \mapsto V_2$ och $B : V_2 \mapsto V_3$ vara linjära avbildningar givna av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

i någon bas i respektive vektorrum. Bestäm en bas för nollrum och värderum för A, B samt BA.

Problem. 38 (Linda)
Låt V_1, V_2, V_3 vara vektorrum, och $A : V_1 \mapsto V_2$ en linjär avbildning med 2-dimensionellt nollrum, och 2-dimensionellt värderum. Låt $B : V_2 \mapsto V_3$ vara en linjär avbildning med 3-dimensionellt nollrum och 3-dimensionellt värderum.

(a) Bestäm dimensionerna på vektorrummen V_1 och V_2.
(b) Bestäm möjliga dimensioner på nollrum och värderum för den sammansatta avbildningen $B \circ A : V_1 \mapsto V_3$.

Jämför med problem 37.

Problem. 39 (Linn-Sofia)
Finns det en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller att $F(2,7,3) = (1,0,1)$, $F(-1,-3,1) = (0,3,-1)$ och $F(1,5,9) = (1,4,-1)$?

Problem. 40 (Line-Lott)
Låt V vara mängden av alla kontinuerliga funktioner f från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ så att $f(x) > 0$ för alla x. Definiera den binära operationen $\oplus$ på $V \times V \mapsto V$ enligt $f \oplus g = f \cdot g$. Definiera även avbildningen $\otimes$ på $\mathbb{R} \times V \mapsto V$ enligt $\lambda \otimes f = f^{\lambda}$.

Visa att V tillsammans med $\oplus$ som vektoraddition, och $\otimes$ som multiplikation med skalär bildar ett vektorrum. Avgör därefter vilka av följande avbildningar från V till V som är linjära.

(a) $T(f(x)) = \sqrt{f(x)}$
(b) $T(f(x)) = f(x) + 1$
(c) $T(f(x)) = f(-x)$
(d) $T(f(x)) = f(x)^{x^2-1}$

Problem. 41 (Lauren)
Låt T vara en linjär avbildning från V till U där $\dim V = 5$ och $\dim U = 6$. Vilken storlek har en matris som representerar T (i något val av baser)?

Problem. 42 (Lovisa)
Visa att operatorn T som avbildar polynomet $p(x)$ på $p(x) + p'(x)$ är en linjär operator i vektorrummet av polynom med reella koefficienter. Är denna avbildning inverterbar om man begränsar graden på polynom till något fixt n?

5. Egenvärden, egenvektorer & diagonalisering

En *egenvektor* till en kvadratisk matris A, är en vektor $\mathbf{v} \neq 0$ som uppfyller att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för något tal reellt eller komplext tal λ. Detta tal kallas för *egenvärdet* till $\mathbf{v}$ och man säger också att det är ett egenvärde till A. Om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ följer det att $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0$. Vi kan bryta ut $\mathbf{v}$ genom att sätta in enhetsmatrisen på lämpligt ställe, och får $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$. Detta innebär precis att $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)$.

Vi har nu konstaterat att om $\mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärde λ, så tillhör egenvektorn kärnan till matrisen $A - \lambda I$. Eftersom $\mathbf{v}$ per definition inte är nollvektorn, måste kärnan vara minst endimensionell. Detta innebär att $A - \lambda I$ inte kan ha full rang, så dess determinant, $|A - \lambda I|$ måste vara 0. Polynomet $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ vi får av att utveckla determinanten, kallas för A:s *karakteristiska polynom*. Nollställena till det karakteristiska polynomet ger precis A:s egenvärden.

Till varje egenvärde λ, finns ett tillhörande *egenrum*, som spänns upp av alla egenvektorer med detta egenvärde.

Man kan visa att egenvektorer med olika egenvärde alltid är linjärt oberoende. Om vi kan finna lika många linjärt oberoende vektorer som storleken på A, så kan man *diagonalisera* A. Detta sker genom att man tillverkar basbytesmatrisen T som byter från basen av egenvektorer till standardbasen. Det gäller då att

$D = T^{-1}AT \Leftrightarrow A = TDT^{-1}$, där D är diagonalmatrisen med A:s egenvärden på diagonalen, och kolonnerna i T utgörs av motsvarande egenvektorer.

Att bestämma egenvärden till avbildningsmatrisen till en linjär avbildning säger mycket om den linjära avbildningen. Speciellt gäller att egenvärdena är *oberoende* av i vilken bas man skriver ned avbildningsmatrisen i. Detta följer av att det karakteristiska polynomet för A och TAT^{-1} är samma, för alla inverterbara matriser T.

Det är inte alla matriser som kan diagonaliseras. Ett första problem är att egenvärden kan bli komplexa tal, men även om man tillåter dessa (vilket går alldeles utmärkt), kan det hända att man inte hittar tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer. Övertriangulära matriser $n \times n$-matriser ($n \geq 2$), med ettor på huvuddiagonalen går till exempel inte att diagonalisera.

De symmetriska matriserna, som uppfyller $A = A^T$, kan däremot alltid diagonaliseras. Alla egenvärden är dessutom reella, och man kan alltid välja egenvektorerna till att vara *ortogonala*, något vi skall tala mer om senare.

Problem. 43 (Eleonora)
Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Problem. 44 (Evelina)
Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Problem. 45 (Emelie)
Bestäm alla egenvärden och bas för motsvarande egenrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 46 (Enya)
Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 47 (Esmeralda)
Beräkna egenvärden och motsvarande egenvektorer till följande matriser:

$$(a) \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Problem. 48 (Embla)
Visa att matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
inte kan diagonaliseras.

Problem. 49 (Ester)
Bestäm en matris B så att
$$B^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problem. 50 (Elvira)
På ett universitet så studeras två ämnen, teoretisk fysik och virkning. Varje år, så börjar 20% av de som är sysslolösa med teoretisk fysik, och 20% av de som studerar teoretisk fysik byter till virkning. Slutligen, av de som virkar, byter 30% av studenterna till teoretisk fysik. Övriga personer fortsätter med samma syssla som de hade tidigare.

Om det ett visst år finns 120 personer som ägnar sig åt att vara sysslolös, studera fysik resp. virka, hur ser fördelningen ut efter ett år? Närmar sig fördelningen ett stabilt tillstånd med åren? Bestäm vilken i sådana fall.

Problem. 51 (Emma)
Låt $V = \{p(x) : \deg p \leq 3\}$ och låt T vara den linjära avbildningen som har egenskaperna $T(1) = x$, $T(x) = x^2$, $T(x^2) = x^3$ och $T(x^3) = 1$. Bestäm en egenvektor till T.

6. Skalärprodukt och ortogonalitet i vektorrum över de reella talen

Mätningar av olika former och slag kan i många fall representeras som vektorer i ett lämpligt vektorrum V. För att jämföra vektorer och mäta hur lika de är, krävs ett slags avståndsbegrepp. I många tillämpningar vill man hitta den vektor $\mathbf{w} \in W$ som ligger närmast $v \in V$ där $W \subseteq V$. Båda dessa problem kan lösas genom att man inför en skalärprodukt på vektorrummet V.

En *skalärprodukt* är en avbilding $V \times V \to \mathbb{R}$, betecknad $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, som uppfyller följande, där $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är godtyckliga vektorer i V:

(1) $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \geq 0$ med likhet om och endast om $\mathbf{u} = 0$.
(2) $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle$.
(3) $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$.
(4) $\langle \lambda \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, för alla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Genom att kombinera flera av egenskaperna ovan, kan man sedan visa samband så som
$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle.$$

Hur kommer då *längden* av en vektor in i bilden? Jo, längen av en vektor definieras som $|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}$. Notera att den första egenskapen ovan gör att $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle$ inte är negativt, och vi kan då dra roten ur detta tal. Vi har också att enbart nollvektorn har längd noll.

Den sista egenskapen tillsammans med den andra ger att

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{v}| &= \sqrt{\langle\lambda\mathbf{v}|\lambda\mathbf{v}\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle} \\ &= |\lambda|\sqrt{\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle} \\ &= |\lambda||\mathbf{v}|. \end{aligned}$$

Notera att $|\lambda|$ här betecknar absolutbeloppet av det reella talet λ. Slutsatsen är att längden uppför sig som vi förväntar oss; en vektor som multipliceras med 5, blir också 5 gånger längre. En vektor med längd ett sägs vara *normerad*, och alla vektorer $\mathbf{v}$ förutom nollvektorn kan *normeras*, genom att bilda vektorn $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Denna nya vektor är parallell med $\mathbf{v}$ men har längd 1.

Från skalärprodukten definieras också *ortogonalitet*. Två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sägs vara ortogonala (eller vinkelräta) mot varandra om de uppfyller att $\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0$. Vi kan då tala om upppsättningar av vektorer, där varje par av vektorer är ortogonala, och alla vektorer har längd ett. Om dessa utgör en bas, säger vi att de är en ON-bas. För att konstruera ON-baser, använder vi oss av *Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess*. Denna typ av baser är speciellt användbara i tillämpningar, då många beräkningar blir betydligt enklare.

Vi kommer fokusera på två typer av skalärpodukter. Den första är standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$, som definieras på koordinaterna i standardbasen genom formeln

$$\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n.$$

Den andra skalärprodukten som är vanligt förekommande definieras på rummet av polynom (eller annat lämpligt rum av funktioner) enligt

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$$

där $a < b$ är reella tal. Notera att $|p(x)| = \sqrt{\int_a^b p(x)^2dx}$ och att detta verkligen bara är noll om $p(x)$ är nollpolynomet. Du kan själv verifiera de tre andra villkoren för skalärprodukt ovan.

Sats 12.2 är mycket användbar och säger hur vi hittar koordinaterna för en vektor med respekt till en ON-bas. Om $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en ON-bas i V och vi har en vektor $\mathbf{v} \in V$, så ges koordinat x_i av $\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{v}\rangle$, i basen $\mathbf{e}$. Med andra ord,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \langle\mathbf{e}_i|\mathbf{v}\rangle\mathbf{e}_i.$$

Problem. 52 (Sabina)

Utför följande beräkningar på rummet av polynom med skalärprodukten

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

(a) $\langle x^2 | x \rangle$
(b) $\langle x^2 + 2 | x + 1 \rangle$
(c) $|x^2|$

Problem. 53 (Samantha)

Vektorerna $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 0, -1)$ och $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)$ är linjärt oberoende. Utför Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på dessa vektorer.

Problem. 54 (Simona)

Bestäm en ortonormerad bas för det rum som spänns upp av kolonnerna i matrisen nedan, och utvidga (om nödvändigt) till en bas för hela $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem. 55 (Savannah)

Vektorerna $(1, 1, 1), (1, 0, 3), (3, 2, 5)$ och $(0, -1, 2)$ spänner upp ett underrum U i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ON-bas för detta underrum, och utvidga till en bas för hela $\mathbb{R}^3$.

Problem. 56 (Sandy)

Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1, 0, 0, -2)$ på rummet U som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1, 1)$, genom att först bestämma en ON-bas för U och utnyttja denna.

Problem. 57 (Sophia)

En viss typ av data kan presenteras med hjälp av polynom. Dock kräver det ganska mycket plats att spara ett polynom, och vi är bara intresserade av den ortogonala projektionen på rummet U som spänns upp av vektorerna x och x^2. Vi använder standardskalärproduken för polynom, på intervallet $[0, 1]$.

Bestäm en ON-bas för U, och beräkna sedan den ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = 1 + 2x$ på U.

Problem. 58 (Stephanie)

Låt U vara det linjära höljet av vektorerna $(1, 1, 0, 1)$ och $(1, 0, 0, 0)$. Låt V vara det linjära höljet av $(0, 1, -1, 1)$ och $(0, 1, 1, 1)$. Bestäm en ON-bas för $U \cap V$ eller visa att detta bara är nollvektorn, utvidga till en ON-bas för U, utvidga denna bas ytterigare till en ON-bas för $U + V$ och utvidga denna slutligen till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

Problem. 59 (Siri)

Låt $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ där T:s nollrum spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, 0)$ och $(1, 0, 2, 0)$ och vektorerna $(1, 1, 1, 1)$ samt $(1, 1, -1, -1)$ är egenvektorer med egenvärde 1 resp. 2 till T, (ON-bas).

(a) Bestäm ON-baser för T:s nollrum och värderum.
(b) Beräkna $T(20, 2, -30, 0)$.

7. Lösningar

Lösning. 1

Determinanten för en matris bevaras under transponering, samt operationen att addera en multipel av en rad till en annan rad. Vi kan alltså utföra en slags gauss-elimination, tills att matrisen blir övertriangulär. Determinanten byter tecken om vi byter plats på två rader och slutligen, determinanten av en övertriangulär är produkten av elementen på diagonalen.

Vi ser att de två första raderna är ganska lika, liksom de två sista, vilket utnyttjas för att beräkningarna skall gå lättare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{Subtrahera rad 2 från 1 \& samt rad 4 från 3}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{Subtrahera rad 2 två gånger från rad 4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \text{Addera tredje raden fem gånger till rad 4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$

Vi vi byter nu plats på raderna 1 och 2, 2 och 3, och sedan 3 och 4, för att matrisen skall bli övertriangulär. Detta innebär tre byten av rader, så determinanten multipliceras med $(-1)^3$ och vi får

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-7) \cdot 4 = 28.$$

Determinantens värde är alltså 28.

Lösning. 2

Det ser ut som om det kommer bli svåra beräkningar om vi gausseliminerar. Tricket här är att utveckla determinanten längs en rad eller kolonn. I allmänhet, varje position i en determinant associeras ett tecken, liksom ett schackbräde, där övre vänstra hörnet alltid har positivt tecken:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Att utveckla längs en rad (kolonn) innebär att vi för varje position i raden (kolonnen), stryker de element som står på samma rad och kolonn, tar determinanten av den mindre matrisen, och multiplicerar med elementet samt tecken. Alla dessa termer adderas sedan samman. I vårt konkreta problem väljer vi att utveckla längs med första raden, då denna innehåller många nollor, vilket underlättar berkningarna:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & x^2 & x & x+1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+1 \\ 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & x+1 \\ 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x^2 & x+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x^2 & x \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Eftersom två av dessa termer är multiplicerade med 0, så försvinner dessa. Det som återstår är då uttrycket

$$x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+1 \\ 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x^2 & x \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Vi utvecklar de två mindre determinanterna på samma sätt, längs med första resp. sista raden, eftersom dessa rader innehåller många nollor.

$$x \left(1 \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} x^2 & x+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} \right)$$
$$-2 \left(0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & x \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$x \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} - 2(x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}$$

Slutligen beräknas de sista determinanterna med formeln för $2 \times 2-$determinanter, och vi får

$$\begin{aligned} x\left(x \cdot 1 - (x-1)(x+1)\right) - 2(x-1)\left(x \cdot x^2 - x \cdot 1\right) &= \\ x(x - x^2 + 1) - 2(x-1)(x^3 - x) &= \\ x^2 - x^3 + x - 2(x^4 - x^2 - x^3 + x) &= -2x^4 + x^3 + 3x^2 - x. \end{aligned}$$

Determinantens värde är då $-2x^4 + x^3 + 3x^2 - x$.

Lösning. 3

Endast svar presenteras: (a) $x^2 - x + 12$, (b) $-x^2$, (c) 1.

Lösning. 4

Första steget blir att beräkna determinanten i vänsterledet. Rad 3 multiplicerade med x subtraheras från rad 1. I nästa steg utvecklar vi längs med första kolonnen, då denna innehåller många nollor. I tredje steget utvecklar vi längs med första raden:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x^2 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix}.$$

Ekvationen reduceras då till $-(1-x^2)(1-x^2)=0$ som med hjälp av konjugatregeln faktoriseras om till $(1-x)^2(1+x)^2=0$.

Svar: Ekvationens lösningar är $x=\pm 1$, där båda är dubbelrötter.

Lösning. 5

Först beräknas determinanten. Första raden används för att eliminera i övriga rader. Därefter utvecklar vi längs med första kolonnen och bryter vi ut faktorn $x-1$ ur sista raden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 1 & 2 & 4 & 3x \\ 1 & 3 & 9 & 2x \\ 1 & x & x^2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 0 & 1 & 3 & -3x \\ 0 & 2 & 8 & -4x \\ 0 & x-1 & x^2-1 & 6-6x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3x \\ 2 & 8 & -4x \\ 1 & x+1 & -6 \end{vmatrix}$$

Vi forstätter med att med hjälp av första raden eliminera i de två andra:

$$\begin{aligned} =&(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3x \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & x-2 & 3x-6 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 2 & 2x \\ x-2 & 3x-6 \end{vmatrix} = \\ =&(x-1)\left((6x-12)-2x(x-2)\right) = -2(x-1)(x^2-5x+6) \end{aligned}$$

Ekvationen i uppgiften reduceras (efter division med -2) således till

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)=0$$

vilket fås efter att hitta rötterna till andragradsuttrycket med t.ex. kvadratkomplettering. Det är nu klart att ekvationens lösningar ges av $x=1,2,3$.

Lösning. 6

Determinanten bevaras under gausselimination, så vi subtraherar första raden från alla de övriga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-1-x \end{vmatrix}$$

Matrisen i determinanten är övertriangulär, så dess determinant är produkten av diagonalelementen, vilket blir

$$1\cdots(1-x)(3-x)(5-x)\cdots(2n-1-x).$$

Detta polynom har nollställena $1,3,5,\cdots,2n-1$, vilket då ger svaret på uppgiften.

Lösning. 7

Rangen bevaras under radreducering, så vi börjar med att radreducering med hjälp av sista raden:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det ser ut som om alla rader är linjärt oberoende, utom för mycket speciella värden på a. Detta innebär att rangen generellt är 4 då vi har precis fyra rader. För att verifiera detta, och finna de eventuellt speciella värdena på a beräknar vi determinanten av denna matris. Utveckling längs med första kolonnen leder till

$$\begin{aligned} -\begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= -\left((a-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (a^3-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -\big((a-1) - (a^2-1)\cdot 2 + (a^3-1)\cdot 1\big) \\ &= 1 - a + 2a^2 - 2 + 1 - a^3 \\ &= -a^3 + 2a^2 - a = -a(a^2-2a+1) = -a(a-1)^2 \end{aligned}$$

Vi ser att endast då $a = 0$ och $a = 1$ så är rangen inte 4. Dessa värden sätts in i matrisen vi fick efter radreducering.

Fall $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och rangen för ursprungliga matrisen är alltså 3 om $a = 0$.

Fall $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger även detta att rangen 3. Sammanfattningsvis: Rangen för den givna matrisen är 4, utom då $a = 0$ eller $a = 1$, och i dessa fall är rangen 3.

Lösning. 8

Efter gausselimination av (a) fås t.ex. matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som har två pivotelement, så rangen är två. Detta innebär att antalet linjärt oberoende rader i ursprungliga matrisen är 2. Samma gäller för kolonnerna. Notera nu att matrisen i uppgift (b) är transponatet av (a), där rader har bytts till kolonner. Alltså har linjärt oberoende rader blivit linjärt oberoende kolonner och vice versa, och rangen i (a) och (b) måste nödvändigtvis vara samma.

Lösning. 9

Vi börjar med att transponera båda leden. Kom ihåg att $(AB)^T = B^T A^T$ samt att $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Vi får

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vi ställer nu upp det som en inversberäkning, men med den högra matrisen ovan till höger, snarare än identitetsmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right).$$

Låt oss kalla matriserna i respektive block för A och B, dvs. vi har blockupppställningen $(A|B)$. Gausselimination på denna blockmatris är ekvivalent med multiplikation från vänster med elementära matriser. När vi slutligen har identitetsmatrisen i vänsterblocket, har båda blocken multiplicerats med ursprungliga vänsterblockets invers från höger. Gausselimination gör alltså att $(A|B)$ övergår till $(I|A^{-1}B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera i kolonn 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \text{Platsbyte rad 2 \& 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera i kolonn 3 \& teckenbyte}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 9 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \text{Eliminera i kolonn 2 \& teckenbyte}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -15 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Slutligen har vi då att

$$M^T = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 20 \\ -4 & 12 & -12 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -15 & 12 & -3 \\ 20 & -12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi är nu klara.

Lösning. 10

I deluppgift (a), kan man till exempel ta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svaret på deluppgift (b) är nej. Om B har rang 4, så har B full rang, och då är $|B| \neq 0$. Det följer att $|B^k| = |B|^k$ är nollskild för alla heltal $k > 0$. Eftersom nollmatrisen har determinant 0, finns det inget k så att B^k är nollmatrisen. Matrisen B kan alltså inte vara nilpotent.

Lösning. 11

Det finns många sätt att lösa denna uppgift. Här presenteras ett par.

Induktion och blockmatriser: Det första som sker, är att vi beräknar $|C_1|$, $|C_2|$ och $|C_3|$. Efter lite jobb blir dessa värden -3, 9 och -27. Vi tror att $|C_n| = (-3)^n$. Basfallet $n = 1$ är redan klart. Antag nu att $|C_n| = (-3)^n$ för ett visst n. Vi vill visa att $|C_{n+1}| = (-3)^{n+1}$. Tittar vi på hur C_{n+1} ser ut, kan denna skrivas på blockform som

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & C_n & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där 0 representerar en rad eller kolonn med nollor av lämplig storlek. Determinanten beräknas genom utveckling längs med första kolonnen, och ger

$$|C_{n+1}| = \begin{vmatrix} C_n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ C_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Notera tecknen. Kom ihåg att C_n har storlek $2n \times 2n$. Utvecklar vi var och en av matriserna längs med sista kolonnen, får vi nu

$$|C_{n+1}| = \left|C_n\right| - 4\left|C_n\right| = -3|C_n|.$$

Alltså, $|C_{n+1}| = -3|C_n|$. Om nu $C_n = (-3)^n$, så måste då $C_{n+1} = (-3)^{n+1}$. Induktionsbeviset är nu klart.

Gausselimination: Vi kan med hjälp av Gausselimination direkt arbeta med $|C_n|$:

$$|C_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rad j multipliceras med -2 och läggs sedan till rad $2n - j$, för $j = 1, 2, \dots, n$. Detta eliminerar alla tvåor i det nedre, vänstra $n \times n$-blocket i matrisen. Operationerna bevarar determinanten och resultatet blir en övertriangulär blockmatris,

$$|C_n| = \begin{vmatrix} I & 2A \\ 0 & I - 4I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 2A \\ 0 & -3I \end{vmatrix}$$

där A är $n \times n$-matrisen med ettor på anti-diagonalen. Eftersom resultatet ovan är övertriangulär, ges determinanten av produkten av diagonalelementen, $1^n(-3)^n = (-3)^n$. Alltså är $|C_n| = (-3)^n$.

Lösning. 12

Vi vet att V har dimension tre. Det räcker alltså att visa att de tre polynomen vi fått är linjärt oberoende, eftersom de är rätt till antalet. Vi vill alltså visa att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ är den enda lösningen till ekvationen

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2-1) + \lambda_3(2x) = 0.$$

Vi bryter ut potenser av x och får att ovanstående ekvation blir

$$(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_3) + \lambda_2 x^2 = 0.$$

För att detta skall gälla för alla x, måste koefficienterna framför varje potens vara 0. Detta ger oss systemet

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

som enbart har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Vi har nu visat att $1 + x$, $x^2 - 1$ och $2x$ är linjärt oberoende, och eftersom de är lika många som dimensionen på V, följer det att de är en bas.

Vi skall nu finna koordinaterna för polynomet $x^2 + 3x + 2$ i denna bas. Koordinaterna är precis den unika lösning $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ till ekvationen

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2-1) + \lambda_3(2x) = x^2 + 3x + 2.$$

vilket på samma sätt som ovan leder till ett ekvationssystem, nämligen

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & = 3 \\ \lambda_2 & = 1 \end{cases}.$$

Detta löses, och vi finner att $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 1, 0)$. Koordinaterna för polynomet $x^2 + 3x + 2$ i basen $\{1 + x, x^2 - 1, 2x\}$ ges alltså av $(3, 1, 0)$.

Lösning. 13

Vi vet att $\mathbb{R}^3$ är ett vektorrum, så det räcker att visa att V är ett delrum till $\mathbb{R}^3$. För att visa detta, måste vi visa att V är sluten under addition, samt multiplikation med $\lambda \in \mathbb{R}$.

Antag att $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V$, det vill säga $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ och $x_2 + y_2 + z_2 = 0$. Summan av dessa två vektorer blir $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Vi vill visa att denna vektor uppfyller att $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$ för då ligger denna vektor i V. Men observera att

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

eftersom vi antog att de båda uttrycken i de högra parenterserna är noll. Vi har alltså visat att V är sluten under addition.

För att visa att V är sluten under multiplikation med skalär, räcker det med att inse att om $x + y + z = 0$, så är även $\lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ för alla $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har alltså konstaterat att om $(x, y, z) \in V$ så gäller även att $\lambda(x, y, z) \in V$ så V är sluten under multiplikation med skalär. V är då ett delvektorrum.

Vi vill nu beskriva mängden av vektorer i V lite elegantare, så vi löser ekvationssystemet $x + y + z = 0$. Detta system har oändligt många lösningar, som på parameterform kan skrivas $(x, y, z) = s(1, -1, 0) + t(1, 0, -1)$, där $s, t \in \mathbb{R}$. Alla vektorer i V kan då skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1, -1, 0)$ och $(1, 0, -1)$. Dessa vektorer är linjärt oberoende, och utgör då en bas för V.

Sammanfattningsvis, $(1, -1, 0)$ och $(1, 0, -1)$ utgör en bas för V och V:s dimension är 2 eftersom det krävs två basvektorer för att spänna upp V.

Lösning. 14

För att visa att det är ett delrum, måste vi visa att V är sluten under addition, samt under multiplikation med skalär.

Slutenhet under additition: Vi har två matriser $A_1, A_2 \in V$ som då kan skrivas som

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & a_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ -b_2 & a_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Summan av dessa matriser är då

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ -b' & a' & c' \end{pmatrix}$$

där $a' = a_1 + b_1$ $b' = b_1 + b_2$ och $c' = c_1 + c_2$. Det är då klart att $A_1 + A_2$ också ligger i V.

Slutenhet under multiplikation med skalär: Låt oss titta på λA_1 och notera att

$$\lambda A_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ -\lambda b_1 & \lambda a_1 & \lambda c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ -b' & a' & c' \end{pmatrix}$$

där $a' = \lambda a_1$ $b' = \lambda b_1$ och $c' = \lambda c_1$. Det är då klart att λA_1 ligger i V. Vi är nu klara med deluppgift (a).

För att hitta en bas noterar vi att det finns tre parametrar att variera, a, b och c. Vi ser att

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{m_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m_3}.$$

Från detta är det nu uppenbart att alla matriser i V kan skrivas som en linjärkombination av m_1, m_2 och m_3, så vi kan säga att dessa *spänner upp* V. Vi ser också att m_1, m_2 och m_3 är linjärt oberoende, enda lösningen till

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ges av att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Linjärt oberoende, samt att m_1, m_2 och m_3 spänner upp V betyder precis att dessa matriser utgör en bas i V.

Slutligen,

$$\begin{pmatrix} 2 & \pi & 42 \\ -\pi & 2 & 42 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 42 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så koordinaterna för den givna matrisen i basen m_1, m_2, m_3 är $(2, \pi, 42)$.

Lösning. 15

Delmängderna (a) och (d) är delvektorrum i $\mathbb{R}^3$.

I mängd (b) så är mängden inte sluten under addition, (vektorerna $(1,1,0)$ och $(2,4,0)$ ligger i mängden, men inte deras summa $(3,5,0)$, eftersom $3^2 \neq 5$) och i (c) finns inte nollvektorn med, som alltid skall finnas i ett vektorrum.

Lösning. 16

Vi måste visa att ekvationen

$$b_1 + b_2(x+1) + b_3(x^2+x+1) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

alltid har en unik lösning, oavsett c_1, c_2, c_3. Detta översätts till ekvationssystemet

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 &= c_1 \\ b_2 + b_3 &= c_2 \\ b_3 &= c_3 \end{cases}$$

som på matrisform blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c_1 - c_3 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 - c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 - c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right)$$

Systemet har alltså den entydiga lösningen $(b_1, b_2, b_3) = (c_1 - c_2, c_2 - c_3, c_3)$ så $1, x+1, x^2+x+1$ är en bas, och koordinaterna för $c_1 + c_2x + c_3x^2$ i denna bas är $(c_1 - c_2, c_2 - c_3, c_3)$.

Lösning. 17

En bas för U ges t.ex. av polynomen x, x^2, x^3 och lägger vi till polynomet 1 fås en bas för hela rummet.

Lösning. 18

Ansätter vi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ översätts villkoret $BA = 0$ till matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efter utförd multiplikation leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + 2c &= 0 \\ b + 2d &= 0 \end{cases}$$

vars lösningar är $(a,b,c,d) = s(2,0,-1,0) + t(0,2,0,-1)$. En bas ges då av matriserna $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ och delrummets dimension är då två.

Lösning. 19

Radrummet till en matris är det linjära rum som spänns upp av matrisens rader. Detta rum bevaras under gausselimination på raderna. Värderummet spänns upp av linjärt oberoende kolonner i matrisen, och motsvarar de kolonner i A som har pivotelement efter uförd gausselimination. Nollrummet ges av alla lösningar till systemet $Ax = 0$.

Genom gausselimination på raderna kan vi lätt svara på alla tre frågorna.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix} = \text{Eliminera med hjälp av första raden.}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \text{Eliminera med hjälp av rad 2, byt tecken.}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

De nollskilda raderna är linjärt oberoende, så A: radrum spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, -1, 1)$ och $(0, 0, 1, 0, 0)$. Kolonn 1 och 3 är de enda kolonnerna med pivotelement, så kolonn 1 och 3 i ursprungliga matrisen är en bas för värderummet till A, dvs. $(1, 1, 0, 2)^T$ och $(2, 1, 1, 3)^T$. Slutligen, om vi ser resultatet ovan som vänsterledet i ekvationssystemet $Ax = 0$ efter utförd gausselimination, får vi den parametriserade lösningen $x = s(0, 1, 0, 0, 0) + t(1, 0, 0, 1, 0) + u(-1, 0, 0, 0, 1)$ och vektorerna $(0, 1, 0, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 1, 0)^T$ samt $(-1, 0, 0, 0, 1)^T$ utgör då en bas för nollrummet till A.

Lösning. 20

(a) Efter gausselimination får vi enhetsmatrisen. Rader och kolonner måste då vara linjärt oberoende. En bas för radrummet, (och kolonnrummet) ges av standardbasen. Matrisen har bara nollvektorn i nollrummet, så detta rum saknar basvektorer. Värderummet är samma som kolonnrummet, så även här fungerar standardbasen. Rangen för matrisen är 4.

(b) Matrisen radreduceras till

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

De nollskilda raderna blir en bas för radrummet, första och tredje kolonnen innehåller pivotelement så dessa kolonner i ursprungliga matrisen blir en bas för kolonnrummet och därmed värderummet. Vektorerna $(3, 0, -1, 0, 1)$, $(-2, 0, -1, 1, 0)$, samt $(3, 1, 0, 0, 0)$ utgör en bas för nollrummet, och matrisens rang är 2.

(c) Matrisen radreduceras till

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

De nollskilda raderna blir en bas för radrummet, första och tredje kolonnen innehåller pivotelement så dessa kolonner i ursprungliga matrisen blir en bas för kolonnrummet och därmed värderummet. Vektorerna $(4, 0, -3, 1)$, och $(-2, 1, 0, 0)$ utgör en bas för nollrummet, och matrisens rang är 2.

Lösning. 21

Metod (a): Vi ställer upp vektorerna som rader till en matris, så U är alltså radrummet till A nedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Gausselimination bevarar radrummet, så vi utför gausselimination tills vi får linjärt oberoende rader somt nollrader:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En bas för U ges då av vektorerna $(1, 0, 2)$ och $(0, 1, -3)$.

Metod (b): Vi ställer upp de vektorer som spänner upp U som kolonner i en matris:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Kolonnrummet (även kallat bildrummet) spänns upp av B:s kolonner, och är då samma linjära rum som U. De kolonner *i denna matris* som innehåller ett pivotelement efter gausselimination, utgör en linjärt oberoende mängd som spänner upp kolonnrummet.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De två första kolonnerna innehåller pivotelement, så de två första kolonnerna i B utgör en bas till U. Dessa är $(1, 0, 2)$ och $(-1, -1, 1)$.

Lösning. 22

Vi vill behålla de ursprungliga vektorerna. Därför ställer upp vektorerna som kolonner i en matris, och fyller på med enhetskolonner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Målet är nu att ta fram linjärt oberoende kolonner i denna matris. Vi utför gausselimination, tills matrisen är på trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

De fyra första kolonnerna innehåller pivotelement, så de motsvarande kolonnerna i ursprungliga matrisen är linjärt oberoende. Alltså måste vektorerna $(1, 3, -1, -1)$, $(0, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 0, 0)$ och $(0, 1, 0, 0)$ utgöra en bas för $\mathbb{R}^4$.

Lösning. 23

Vi ställer upp vektorerna som rader i en matris, på formen $\begin{pmatrix} U & U \\ V & 0 \end{pmatrix}$ där U och V är blockmatriserna med vektorerna som spänner upp U respektive V:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi utför gausselimination på denna matris. De nollskilda radvektorerna i vänsterledet efter utförd gausselimination ger en bas för radrummet i vänsterledet. Detta är samma som en bas för alla vektorer som kan skrivas som linjärkombinationer av vektorer från U och V, och är då en bas för $U + V$. De radvektorer i högerledet, där motsvarande vänsterled är nollvektorn, kommer ge en bas för snittet $U \cap V$.

(Detta kan ses som att en linjärkombination av vektorer från U blev exakt lika med en linjärkombination av vektorer i V och deras skillnad är då nollvektorn i vänsterledet. U-delen är vektorn i högerledet. Denna vektor måste då tillhöra $U \cap V$).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{Eliminera med hjälp av första raden}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) = \text{Använd rad 3 på rad 2, byt plats på 2 och 5.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) = \text{Eliminera med hjälp av rad 2.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \text{Dela rad 3 med -2 eliminera i rad 4 och 6.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) = \text{Tag -1 av rad 4 till rad 6, och byt platser.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{Eliminera med hjälp av rad 4.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De tre linjärt oberoende vektorer i vänsterledet ger en bas för $U + V$ som i detta fall är samma som $\mathbb{R}^3$. Vi kan då använda standardbasen, eller den vi fått fram, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Snittet ges av de två linjärt oberoende vektorerna i högerledet $(1, 1, 0)$ och $(0, -1, 1)$.

Lösning. 24

Endast svar ges till detta problem:

(a) $U + V = \mathbb{R}^3$ så standardbasen fungerar. $U \cap V$ spänns upp av $(1, 0, 1)$.
(b) $U + V$ spänns upp av $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ och $(0, 0, 0, 1)$. $U \cap V$ spänns upp av $(5, 0, 4, 1)$.
(c) $U + V = U \cap V$ och dessa spänns upp av $(11, 0, -1, -2)$ och $(0, 11, -5, -10)$.
(d) $U + V$ är hela $\mathbb{R}^3$, så dessa spänns upp t.ex. av standardbasen. Snittet $U \cap V$ består endast av nollvektorn.

Lösning. 25

I var och en av uppgifterna, ställ upp vektorernas koordinater i standardbasen för resp. vektorrum, som kolonner i en matris. Radreducera till trappstegsform. De kolonner med pivotelement indikerar en bas för det linjära rum som vektorerna i M spänner upp. I (a) och (b) utgör t.ex. de tre första vektorerna en bas. Svaret i (b) fås från radreducering av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt, i (c) utgör de två första vektorerna en bas, och slutligen i (d) är det första, andra och femte polynomet en bas.

Lösning. 26

(a) Notera att $U = \operatorname{Im} A$, eftersom U ges av kolonnrummet till A. Det är klart att $\operatorname{rank}(A\ B) \geq \operatorname{rank} A$ för alla matriser B som har rätt antal rader, rangen för en matris är antalet linjärt oberoende kolonner, och detta antal kan inte minska genom att lägga till fler kolonner.

Om nu $\operatorname{rank}(A\ B) > \operatorname{rank} A$ följer det att minst en kolonn i B är linjärt oberoende från kolonnerna i A. Detta innebär att om $\operatorname{rank}(A\ B) = \operatorname{rank} A$ så är alla kolonnerna i B linjärkombinationer av kolonnerna i A. Således, $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im} A = U$. Å andra sidan, så har vi att $\dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A = \dim U$. Enda möjligheten är då att kolonnerna i B spänner upp hela U. Eftersom vi visste att B:s kolonner dessutom är linjärt oberoende, utgör dessa en bas för U.

(b) Vi ställer upp resp. mängd av vektorer som kolonner i matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Vi börjar med att beräkna rangen på respektive matris:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $\operatorname{rank} A = 3$ och A:s kolonner är linjärt oberoende. På liknande sätt visas att rangen för B också är tre. Slutligen bestämmer vi rangen för $(A\ B)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & -7 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 18 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 & -27 & -90 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser då att $\operatorname{rank}(A\ B) = 3$ och det följer att $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$. Alltså är de två baserna en bas för samma linjära delrum.

Lösning. 27

Kolonnerna i avbildningsmatrisen är koordinaterna för bilden av basvektorerna. Standardbasen i $\mathbb{R}^3$ är $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ samt $(0,0,1)$. Vi har att

- $F(1,0,0) = (1-0, 0-0, 0-1, 1+0+0) = (1,0,-1,1)$
- $F(0,1,0) = (0-1, 1-0, 0-0, 0+1+0) = (-1,1,0,1)$
- $F(0,0,1) = (0-0, 0-1, 1-0, 0+0+1) = (0,-1,1,1)$

Matrisen för T ges då av

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rangen för denna matris är 3, så kärnan för avbildningen har dimension 0. Alltså är avbildningen injektiv. Avbildningen kan inte vara surjektiv, dimensionen på T:s bildrum är samma som matrisens rang, alltså 3. Detta är inte samma som dimensionen på $\mathbb{R}^4$. Avbildningen är då inte surjektiv.

Lösning. 28

Koordinatvektorerna för vektorer i V ser likadana ut som vektorerna själva. Vi kan då konstatera att avbildningsmatrisen M själv måste uppfylla

$$M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \text{ samt } M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}.$$

Detta kan sammanfattas som

$$M\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&3&-3\\5&2&8\end{pmatrix}\Leftrightarrow M=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&3&-3\\5&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&2&0\end{pmatrix}^{-1}$$

Vi vill nu räkna ut produkten i högerledet, vilket görs i Problem 9, eller på valfritt annat sätt. Detta ger att

$$M=\begin{pmatrix}7&-4&1\\-15&12&-3\\20&-12&3\end{pmatrix}$$

vilket svarar på delfråga (a). Vi kan nu enkelt svara på (b),

$$F((0,1,0)^T)=\begin{pmatrix}7&-4&1\\-15&12&-3\\20&-12&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\12\\-12\end{pmatrix}.$$

Slutligen, radreduktion på M ger att

$$M\overset{(1)}{\sim}\begin{pmatrix}7&-4&1\\5&0&0\\20&-12&3\end{pmatrix}\overset{(2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&1\\0&-12&3\end{pmatrix}\overset{(3)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

där vi is steg (1) tog rad 3 och adderade till rad 2. I steg (2) byter vi plats på rad 2 och 1, dividerar rad 1 med 5, samt eliminerar i första kolonnen. I steg (3) eliminerar vi i kolonn 2.

Vi kan nu se att de två första kolonnerna innehåller pivotelement. Därför är kolonn 1 och 2 i M en bas för värderummet till F, dvs. vektorerna $(7,-15,20)^T$ och $(-4,12,-12)^T$. Detta svarar på fråga (c). Slutligen, rangen för M och då för F, är dimensionen på värderummet. Vi har två basvektorer, så rangen är två, vilket svarar på (d).

Lösning. 29

Vi söker vad 1, x och x^2 avbildas på, under de givna linjära avbildningarna.

(a) Ett polynom avbildas på sin derivata. Bilderna blir 0, 1 och $2x$.
(b) Avbildningen evaluerar polynomet i $x-1$. Bilderna blir därför 1, $x-1$ och $(x-1)^2$.
(c) Avbildningen evaluerar polynomet i $2x$, och multiplicerar resultatet med 3. Bilderna blir 3, $6x$ och $12x^2$.

(d) Vi får samma svar som i första deluppgiften, men multiplicerat med x. Detta ger 0, x och $2x^2$.

Lösning. 30

Kolonnerna i avbildningsmatrisen är koordinaterna för bilden av basvektorerna, så vi beräknar var basvektorerna avbildas. Första basvektorn, 1, avbildas på -1 som har koordinaterna $(-1, 0, 0)$. Andra basvektorn, x, avbildas på $-(x-1) = 1-x$ som har koordinaterna $(1, -1, 0)$. Tredje basvektorn, x^2, avbildas på $-(x-1)^2 = -1+2x-x^2$ som har koordinaterna $(-1, 2, -1)$. Avbildningsmatrisen för T i basen $1, x, x^2$ ges då av

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. 31

I var och en av lösningarna bestämmer vi avbildningsmatrisen genom att se var basvektorerna avbildas. Övriga egenskaper kan sedan bestämmas från respektive matris.

Lösning (a):

$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to (1, 1, 1, 1) \\ F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to (1, 0, -1, 0) \\ F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to (0, 1, 0, 0) \\ F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to (0, 0, 0, -1) \end{aligned}$$

Detta ger avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Utför vi gausselimination på denna matris, ser vi att alla kolonner kommer att ge pivotelement. Därför gäller det att $\ker F = 0$ och att $\operatorname{Im} F$ är hela rummet, och spänns t.ex. upp av den bas som var given i uppgiften. Eftersom matrisen nollrummet är nolldimensionellt, är avbildningen injektiv. Eftersom bildrummet är hela $M_2(\mathbb{R})$, är avbildningen surjektiv. F är då också bijektiv, och rangen för avbildningen är 4, vilket är samma som dimensionen på bildrummet, alternativt antalet kolonner med pivotelement efter att matrisen reducerats till trappstegsform.

Lösning (b): Vi får avbildningen beskriven som vad den för med basvektorerna. Vi tackar och tar emot:

$$\begin{aligned} F(1) &= x^3 + 1 \to (1, 0, 0, 1) \\ F(x+1) &= x^2 - 1 \to (-1, 0, 1, 0) \\ F(x^2+1) &= x - 1 \to (-1, 1, 0, 0), \end{aligned}$$

vilket ger oss avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ som radreduceras till } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vi ser att de tre ursprungliga kolonnerna är linjärt oberoende, eftersom alla kolonner i den radreducerade matrisen innehåller pivotelement. Detta ger att bildrummet spänns upp av x^3+1, x^2-1 samt $x-1$ och är tredimensionellt. Tre är också avbildningens rang. Avbildningen har nolldimensionellt nollrum, så den är injektiv, men eftersom bildrummet bara är tredimensionellt, men vi avbildar in i det fyradimensionella $P_3(\mathbb{R})$, så är F inte surjektiv. F saknar då också invers.

Lösning (c): Standardbasen i $P_3(\mathbb{R})$ är $1, x, x^2, x^3$ och vi får

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + x + x^2 \to (1,1,1)\\ F(x) &= 0 + x + 2x^2 \to (0,1,2)\\ F(x^2) &= 0 + x + 4x^2 \to (0,1,4)\\ F(x^3) &= 0 + x + 8x^2 \to (0,1,8). \end{aligned}$$

Avbildningsmatrisen blir

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\end{pmatrix} \text{ som radreduceras till } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3.\end{pmatrix}$$

Från den radreducerade matrisen ser vi att de tre första kolonnerna i avbildninsmatrisen är linjärt oberoende, och utgör då en bas för bildrummet. Översätts dessa tillbaka till polynom i $P_2(\mathbb{R})$, är dessa polynom $1+x+x^2$, $x+2x^2$ samt $x+4x^2$, som då utgör en bas för det tredimensionella värderummet. Rangen för avbildningen är då tre. Vidare, nollrummet till matrisen är endimensionellt och parametriseras av $s(0,2,-3,1)^T$. En bas för nollrummet ges då av polynomet $2x-3x^2+x^3$, och detta blir endimensionellt. Avbildningen kan då inte vara injektiv. Dimensionen på bildrummet och dimensionen på $P_2(\mathbb{R})$ är samma, så avbildningen är surjektiv.

Lösning (d): Vi har att $F(1,0) = 1 = 1 + 0i$ och $F(0,1) = i = 0 + 1i$. Detta ger oss att avbildningsmatrisen är $2 \times 2-$identitetsmatrisen. Från detta ser vi att 1 och i är en bas för värderummet, som då är tvådimensionellt, samt rangen för avbildningen är 2. Bildrummet är då samma som $\mathbb{C}$,och avbildningen är surjektiv. Nollrummet är nolldimensionellt, så avbildningen är injektiv, och då också bijektiv eftersom vi har surjektivitet.

Lösning. 32

Det är underförstått att vi skall använda standardbaserna i respektive rum. Vi bestämmer bilderna av basvektorerna: $T(1,0,0) = (1,1,2,1)$, $T(0,1,0) = (-1,1,0,0)$, $T(0,0,1) = (2,-1,1,-3)$. Bildvektorerna ställs upp som kolonner i avbildningsmatrisen:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix} \text{ som radreduceras till } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har pivotelement i alla kolonner, är nollrummet nolldimensionellt, och saknar bas. Alla kolonner i avbildningsmatrisen är linjärt oberoende (eftersom dessa innehöll pivotelement efter gausselinination), så $(1, 1, 2, 1)$, $(-1, 1, 0, 0)$ och $(2, -1, 1, -3)$ är en bas för bildrummet. Notera, detta är alltså samma rum som kolonnrummet till avbildningsmatrisen.

Lösning. 33
Vi löser med hjälp av gausselimination på A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De två första kolonnerna innehåller pivotelement, så motsvarande kolonner i A är en bas för värderummet, $\operatorname{Im} A$. En bas för $\operatorname{Im} A$ ges således av vektorerna $(1, -1, 2)$ och $(1, 1, 3)$.

Löser vi ekvationssystemet $A\mathbf{x} = 0$ får vi fram kärnan, $\ker A$. I den radreducerade matrisen ovan, så blir den tredje kolonnen parameterkolonn, och lösningarna till $A\mathbf{x} = 0$ ges av $\mathbf{x} = t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. Vektorn $(1, 1, -1)$ utgör då en bas för $\ker A$, också kallar nollrummet till A.

Slutligen, radrummet för en matris bevaras under radreducering. Raderna i den radreducerade matrisen ovan späänner då upp A:s radrum. De nollskilda raderna i den radreducerade matrisen är också linjärt oberoende, så dessa utgör en bas för radrummet. Vektorerna $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$ utgör då en bas för radrummet till A.

Lösning. 34
Vi bestämmer först avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbaserna. För detta behöver vi bilderna av basvektorerna:

$$T(1) = x \cdot 1 - 1 = -1 + x$$
$$T(x) = x(2ix) - x = -x + 2ix^2$$

Detta leder till koordinatvektorerna $(-1, 1, 0)$ samt $(0, -1, 2i)$ som ställs upp som kolonner i avbildningsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

Radreduktion ger nu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Båda kolonnerna innehåller pivotelement, så kärnan till matrisen är nolldimensionell. Det finns alltså ingen bas för kärnan till matrisen, och $\ker T$ är då också nolldimensionell.

En bas för bildrummet ges av de båda kolonnerna i avbildningsmatrisen, $(-1, 1, 0)$ samt $(0, -1, 2i)$ och motsvarande vektorer i $P_2(\mathbb{C})$ är då polynomen $-1 + x$ samt $-x + 2i$. Dessa utgör en bas i bildrummet till T.

Lösning. 35

Vi börjar med att bestämma T:s avbildningsmatris i standardbasen.

$$\begin{cases} T(1) &= (x+1)'' = 0 \\ T(x) &= \left(x^2+x\right)'' = 2 \\ T(x^2) &= \left(x^3+x^2\right)'' = 2+6x. \end{cases}$$

T:s avbildninsmatris är således

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Funktionsssammansättning av linjära avbildningar motsvarar multiplikation av respektive matriser. Avbildningsmatrisen för $T \circ T$ ges då av

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet till A^2 ges av $s(1,0,0) + t(0,1,0)$ $s,t \in \mathbb{R}$ vilket ger att 1 och x utgör en bas för nollrummet till $T \circ T$. Eftersom den sista kolonnen i A^2 är den enda nollskilda kolonnen, är denna bas för A^2:s värderum. Det konstanta polynomet 12 utgör då en bas för värderummet. Eftersom $T \circ T$:s värderum enbart är de konstanta polynomen, så finns det inte något $p(x)$ av grad max två som avbildas på x under sammansättningen $T \circ T$.

Lösning. 36

(a) Elementen i V är på formen $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$. En bas är då t.ex. 1, x, x^2, x^3, x^4 och x^5.

(b) Vi har att $T_1(1) = x^5$, $T_1(x) = 1 + x^5$, $T_1(x^2) = x^5 + 2x$, $T_1(x^3) = x^5 + 3x^2$, $T_1(x^4) = x^5 + 4x^3$ samt $T_1(x^5) = x^5 + 5x^4$. Matrisen för avbildningen i den bas vi valt ovan ges då av

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och på liknande sätt ges avbildningsmatrisen till T_2 av

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den första matrisen har linjärt oberoende kolonner, vilket lätt inses efter en gausselimination. Därför måste värderummet vara hela V och en bas för detta rum har vi bestämt i (a). Nollrummet är då på grund av dimensionsskäl enbart nollvektorn.

För den andra avbildningen, så är de fem första kolonnerna linjärt oberoende, och de motsvarande polynomen utgör då en bas för för bildrummet. Således, polynomen

$-5x^4$, $1-5x^4$, $2x-5x^4$, $3x^2-5x^4$ och $4x^3-5x^4$ utgör en bas för bildrummet till T_2. Vi kan också utläsa att polynomet x^5 avbildas på nollvektorn, så $\{x^5\}$ är en bas för nollrummet till T_2.

Lösning. 37

Utför vi gausselimination på raderna i A får vi

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

En bas för A:s nollrum ges då av $(2,1,-1)^T$. De två första kolonnerna innehåller pivotelement, så de två första kolonnerna i A är en bas för A:s värderum.

Vi gör samma beräkning på B:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vi konstaterar att B:s nollrum består enbart av nollvektorn, och värderummet spänns upp av alla kolonner i B.

Slutligen, värderummet för BA måste vara bilden av A:s värderum under B. Vi får att $B(1,1,0)^T = (1,3,6,3)^T$ och $B(2,1,-1)^T = (1,4,6,1)^T$. Dessa spänner upp ett tvådimensionellt rum, med bas $(1,3,6,3)^T$ och $(1,4,6,1)^T$. Vi har också att nollrummet till A också är en del av nollrummet till BA. Eftersom $\dim\ker BA + \dim\operatorname{Im} BA = 3$ och vi just har visat att $\dim\operatorname{Im} BA = 2$, och att $\dim\ker BA \geq 1$ så följer det att A:s nollrum också är BA:s nollrum.

Lösning. 38

(a) Allmänt har vi att för en avbildning $T : V \to U$ gäller det att $\dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T = \dim V$. Från informationen given följer det att $\dim V_1 = 2+2 = 4$ och $\dim V_2 = 3+3 = 6$.

(b) Vi har att $\ker A \subseteq \ker BA$ eftersom om $Ax = 0$ så gäller också att $BAx = 0$. Detta ger att $\dim\ker BA \geq 2$. Det kan nu vara så att $\operatorname{Im} A \subseteq \ker B$ eftersom $\dim\operatorname{Im} A = 2$ och $\dim\ker B = 3$. Den sammansatta avbildningen skulle då avbilda alla vektorer på nollvektorn, och $\dim\ker BA = 4$. Alla möjliga värden där emellan är också möjliga, så $\dim\ker BA$ är 2,3 eller 4. Detta leder till att värderummet till BA har dimension 0, 1 eller 2. Som exempel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Här gäller $\dim \operatorname{Im} B_1A = 2$, $\dim \operatorname{Im} B_2A = 1$ samt $\dim \operatorname{Im} B_3A = 0$.

Lösning. 39

Om $(2,7,3)$, $(-1,-3,1)$ och $(1,5,9)$ är linjärt oberoende, så är dessa en bas för $\mathbb{R}^3$. Matrisen med dessa som kolonner blir en inverterbar matris, och vi kan bestämma F unikt enligt metoden i Problem 28. Dock,

$$\begin{vmatrix} 2&-1&1\\ 7&-3&5\\ 3&1&9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&-1&1\\ -3&2&0\\ -15&10&0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2&-1&1\\ -3&2&0\\ -3&2&0 \end{vmatrix} = 0$$

så vektorerna är inte en bas. Tricket blir då att uttrycka den en av vektorerna som en linjärkombination av de andra två. (Detta skall gå då vi nyss kom fram till att vektorerna var linjärt beroende.)

$$\lambda(2,7,3) + \mu(-1,-3,1) = (1,5,9)$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu &= 1\\ 7\lambda - 3\mu &= 5\\ 3\lambda + \mu &= 9 \end{cases}$$

Löser vi detta system, fås $\lambda = 2$ och $\mu = 3$. Således,

$$2(2,7,3) + 3(-1,-3,1) = (1,5,9).$$

Använder vi F på båda sidor, och utnyttjar att F skall vara linjär, fås

$$\begin{aligned} 2(2,7,3) + 3(-1,-3,1) &= (1,5,9) \Rightarrow\\ F\left(2(2,7,3) + 3(-1,-3,1)\right) &= F(1,5,9) \Rightarrow\\ 2F(2,7,3) + 3F(-1,-3,1) &= F(1,5,9) \Rightarrow\\ 2(1,0,1) + 3(0,3,-1) &= F(1,5,9) \Rightarrow\\ F(1,5,9) &= (2,9,-1) \end{aligned}$$

där vi använt oss av att vi fick $F(2,7,3)$ samt $F(-1,-3,1)$ givna i uppgiften. Dvs. för att F skall vara linjär, måste vi ha $F(1,5,9) = (2,9,-1)$, vilket strider mot att $F(1,5,9) = (1,4,-1)$. Därför finns det inte en sådan linjär avbildning.

Lösning. 40

Vi måste verifiera alla axiom som gäller för vektorrum. Vörst noterar vi att V är sluten under vektoradditionen, dvs. produkten av två positiva kontinuerliga funktioner är återigen en sådan funktion. Samma sak gäller om vi bildar den nya funktionen f^λ från en kontinuerlig positiv funktion f. Notera att om funktionen inte var positiv, så hade f^λ inte nödvändigtvis varit kontinuerlig. Alltså är V sluten under additionen, och multiplikation med skalär.

- Associativitet: $f \oplus (g \oplus h) = f \oplus (gh) = fgh = (fg) \oplus h = (f \oplus g) \oplus h$

- Kommutativitet: $f \oplus g = fg = gf = g \oplus f$
- Funktionen som är konstant 1 agerar som nollvektor, $1 \oplus f = 1f = f$.
- Varje vektor har en additiv invers. Vektorn f har inversen f^{-1} och $f^{-1} \oplus f = f^{-1}f = 1$.

För skalärmultiplikationen gäller

- Associativitet: $(\lambda\mu) \otimes f = f^{\lambda\mu} = (f^{\mu})^{\lambda} = \lambda \otimes (\mu \otimes f)$.
- Distributivitet: $\lambda \otimes (f \oplus g) = (fg)^{\lambda} = (f^{\lambda})(g^{\lambda}) = (\lambda \otimes f) \oplus (\lambda \otimes g)$
- Enhetselement: $1 \otimes f = f^1 = f$

Alla dessa likheter följer från potenslagarna och vi har nu visat att V är ett vektorrum.

(a) $T(f(x)) = \sqrt{f(x)}$ är en linjär avbildning. Vi har nämligen att

$$T(f \oplus g) = T(fg) = (fg)^{\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} = T(f) \oplus T(g)$$

samt att

$$T(\lambda \otimes f) = T(f^{\lambda}) = (f^{\lambda})^{\frac{1}{2}} = (f^{\frac{1}{2}})^{\lambda} = \lambda \otimes T(f).$$

(b) $T(f(x)) = f(x) + 1$ är inte linjär. Nollvektorn, $f(x) = 1$ avbildas inte på sig själv.

(c) $T(f(x)) = f(-x)$ är linjär.

$$T(f \oplus g) = T(fg) = f(-x)g(-x) = T(f) \oplus T(g)$$

samt att

$$T(\lambda \otimes f) = T(f^{\lambda}) = f(-x)^{\lambda} = \lambda \otimes T(f).$$

(d) $T(f(x)) = f(x)^{x^2-1}$ är linjär.

$$T(f \oplus g) = T(fg) = (fg)^{x^2-1} = f^{x^2-1} g^{x^2-1} = T(f) \oplus T(g)$$

samt att

$$T(\lambda \otimes f) = T(f^{\lambda}) = (f^{\lambda})^{x^2-1} = (f^{x^2-1})^{\lambda} = \lambda \otimes T(f).$$

Lösning. 41
Lösning saknas.

Lösning. 42
Lösning saknas.

Lösning. 43
Matrisens karakeriskiska polynom ges av

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(8-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 8 + 6 = (\lambda-2)(\lambda-7).$$

Vi finner att egenvärdena ges av $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 2$. Egenvektorerna ges nu av $\ker(A - \lambda I)$, fall $\lambda_1 = 7$ ger oss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-7 & 3 & 0 \\ -2 & 8-7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Detta leder till att vektorn $(1,2)^T$ utgör en egenvektor med egenvärde 7 till matrisen A. På samma sätt, fallet $\lambda_2 = 2$ ger oss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & 3 & 0 \\ -2 & 8-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger oss egenvektorn $(3,1)^T$. Sammanfattningsvis, $(1,2)^T$ är en egenvektor med egenvärde 7, och $(3,1)^T$ är en egenvektor med egenvärde 2.

Lösning. 44

Vi fann i problem 43 att $(1,2)^T$ är en egenvektor med egenvärde 7, och $(3,1)^T$ är en egenvektor med egenvärde 2. Detta ger oss enligt formeln för diagonalisering att

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{T^{-1}}.$$

Lösning. 45

Först bestämmer vi matrisens karakteristiska polynom, genom att beräkna $\det(A - \lambda I)$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) + 2(6-2\lambda) - 2(-6+2\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9. \end{aligned}$$

Här gissar vi en heltalsrot, som måste vara en jämn delare till 9. Vi ser att $\lambda = 3$ är en rot, och polynomdivision samt lösning av resulterande andragradare ger att karakteristiska polynomet kan faktoriseras som $-(\lambda-3)^2(\lambda-1)$. Matrisens egenvärden är då $\lambda = 3$ och $\lambda = 1$. Det återstår att bestämma motsvarande egenrum, det vill säga, en bas till lösningsrummet till ekvationssystemet $A - \lambda I = 0$.

Fallet $\lambda = 1$ ger oss $A - I = 0$ och ekvationssystemet blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{Dela alla rader med 2 och byt plats på rad 1 och 2.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{Eliminera med första raden.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \text{Styk sista raden då denna är parallell med andra.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

I sista steget multiplicerades också andra raden med -1. Lösningarna ges på parameterform, $t(1,1,1)^T$. Egenrummet till egenvärdet $\lambda = 1$ spänns alltså upp av vektorn $(1,1,1)$ och denna vektor är alltså en egenvektor med egenvärde 1.

Fallet $\lambda = 3$ ger systemet $A - 3I = 0$ och vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) = \text{ Alla rader är lika, stryk de två sista och dividera med 2.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vi får ett tvådimensionellt lösningsrum, $s(1,1,0)^T + t(1,0,1)^T$. Vektorerna $(1,1,0)^T$ och $(1,0,1)^T$ är då båda egenvektorer med egenvärde 3, och dessa spänner upp det tvådimensionella egenrummet med egenvärde 3.

Lösning. 46

Vi har i problem 45 bestämt en bas av egenvektorer, $(1,1,1)^T, (1,1,0)^T$ samt $(1,0,1)^T$ och de har motsvarande egenvärden $1, 3$ och 3. Vi kan då diagonalisera A som $A = TDT^{-1}$ där T är basbytesmatrisen vars kolonner utgörs av egenvektorerna, och D är diagonalmatrisen med motsvarande egenvärden på huvuddiagonalen. Vi har att

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och denna måste inverteras. Vi ställer upp detta som en gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \text{ Eliminera med första raden}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \text{ Eliminera med rad 2 och 3 i rad 1.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \text{ Byt plats och tecken på rad 2 och 3.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Således,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notera att man kan få ett annat svar på denna uppgift, eftersom det finns många olika val av bas för egenrummet med egenvärde 3.

Lösning. 47

Här presenteras endast facit. Notera att egenvärden som är dubbelrötter till karakteristiska polynomet oftast bara ger en egenvektor. Arbetar man med symmetriska eller normala matriser, så blir dimensionen på egenrummet dock alltid samma som multipliciteten av egenvärdet.

$$(a)\quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; -3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 1 \end{matrix} \qquad (b)\quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} -21 & -8 & 28 \end{pmatrix}; -4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 3 \end{matrix} \qquad (c)\quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} -8 & 9 & 7 \end{pmatrix}; -5 \\ \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}; -4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; -1 \end{matrix}$$

Lösning. 48

För att en 3×3-matris skall kunna diagonaliseras, måste vi finna tre linjärt oberoende egenvektorer. Den karakteristiska ekvationen till A ges av $|A-\lambda I| = (1-\lambda)^3$ eftersom $A - \lambda I$ är övertriangulär. Vi har alltså enbart egenvärdet 1. Vi bestämmer nu en bas för motsvarande egenrum, vilket för $\lambda = 1$ ges av kärnan till $A - I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eftersom rangen för denna matris är ett, är kärnan tvådimensionell (en bas för kärnan är $(1, 0, 0)^T$ och $(0, 1, 0)^T$). Vi behöver ett tredimensionellt rum av egenvektorer, så matrisen kan inte diagonaliseras.

Lösning. 49

Låt säga vi har en diagonaliserbar matris $A = TDT^{-1}$. Om $D^{\frac{1}{3}}$ ges av diagonalmatrisen D men med kubikroten ur alla element, så följer det att

$$(TD^{\frac{1}{3}}T^{-1})^3 = (TD^{\frac{1}{3}}D^{\frac{1}{3}}D^{\frac{1}{3}}T^{-1}) = TDT^{-1} = A.$$

Strategin blir då att diagonalisera matrisen

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

En snabb beräkning ger oss egenvärdena 8 och 1. Egenvärdet 8 leder till beräkningen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så motsvarande egenvektor blir $(1, 1)^T$. På samma sätt, egenvärdet 1 leder till

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och en egenvektor fås av $(2, -5)^T$. Diagonalisering ger nu att

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

har då ha egenskapen vi söker.

Lösning. 50

Vi kan beskriva övergångarna med en övergångsmatris A, där kolonn j beskriver hur grupp j omfördelas. Element a_{ij} säger hur stor procent som går från grupp j till grupp i. I A motsvarar kolonnerna de sysslolösa, de som studerar fysik, resp. de som virkar. Övergångsmatrisen ges då av

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

och vår startvektor är $\mathbf{v}_0 = (120, 120, 120)^T$. Varje övergång mellan den årliga fördelningen representeras då av en matrismultiplikation. Nästföljande års fördelning ges av $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0$ och så vidare. Vi finner efter matrismultiplikation att $\mathbf{v}_1 = (96, 156, 108)$, så detta är fördelningen av studenter efter ett år.

Vad som nu eftersöks är beteendet av $A^n\mathbf{v}_0$ då $n \to \infty$, vilket vi kan undersöka genom att diagonalisera A. Karakteristiska polynomet ges av

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{8}{10} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} - \lambda & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} - \lambda \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 8 - 10\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 8 - 10\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 7 - 10\lambda \end{vmatrix}.$$

Utveckling längs med första raden ger

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \frac{1}{1000}(8 - 10\lambda) \begin{vmatrix} 8 - 10\lambda & 3 \\ 2 & 7 - 10\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{1000}(8 - 10\lambda)\left[(8 - 10\lambda)(7 - 10\lambda) - 6\right] \\ &= \frac{1}{1000}(8 - 10\lambda)(100\lambda^2 - 150\lambda + 50) \\ &= \frac{50}{1000}(8 - 10\lambda)(2\lambda^2 - 3\lambda + 1). \end{aligned}$$

Detta leder till egenvärdena $\lambda_1 = \frac{8}{10}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}$.

Vi beräknar nu motsvarande egenvektorer:

Fallet $\lambda_1 = \frac{8}{10}$ ger oss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vektorn $\mathbf{u}_1 = (3, -1, -2)^T$ är en bas för motsvarande egenrum.

Fallet $\lambda_2 = 1$ ger oss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vektorn $\mathbf{u}_2 = (0, 3, 2)^T$ är en bas för motsvarande egenrum.

Slutligen, fallet $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ ger oss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vektorn $\mathbf{u}_3 = (0,1,-1)^T$ är en bas för motsvarande egenrum. Basbytesmatrisen T ges då av kolonnerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ och

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Alltså diagonaliseras A som TDT^{-1} och eftersom $A^n = TD^nT^{-1}$ får vi

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{8}{10}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{10}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Notera att då $n \to \infty$, så gäller det att $\left(\frac{8}{10}\right)^n \to 0$ och $\left(\frac{5}{10}\right)^n \to 0$.

Gränsfördelningen, $A^n\mathbf{v}_0$ blir då

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Beräknar vi denna produkt, får vi slutligen vektorn $(0, 216, 144)^T$ som då är den stabila gränsfördelningen.

Lösning. 51

Vi kan direkt bestämma avbildningsmatrisen för T i basen $1, x, x^2, x^3$. Polynomet $a + bx + cx^2 + dx^3$ har koordinaterna (a, b, c, d) i denna basen. Vi får t.ex. att $(1, 0, 0, 0)$ avbildas på $(0, 1, 0, 0)$ eftersom 1 avbildas på x. Avbildningsmatrisen ges då av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar det karakteristiska polynomet med hjälp av determinanten

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)^4 - 1$$

genom att utveckla längs med första raden. Vi ser nu att $\lambda = 1$ är ett nollställe till avbildningsmatrisens karakteristiska polynom. Det bör alltså finnas ett polynom som avbildas på sig själv:

$$\begin{aligned} T(a + bx + cx^2 + dx^3) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \Leftrightarrow \\ ax + bx^2 + cx^3 + d &= a + bx + cx^2 + dx^3 \Leftrightarrow \\ (d-a) + (a-b)x + (b-c)x^2 + (c-d)x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser nu att om vi väljer $a = b = c = d = 1$ så uppfylls sista raden. Man kan nu lätt att kontrollera att polynomet $1 + x + x^2 + x^3$ är en egenvektor till avbildningen (men det behövs inte, metoden ovan garanterar att det är en egenvektor om man räknat rätt på vägen).

Alternativt kan man bestämma en bas för $\ker(A - I)$, då detta rum spänns upp av egenvektorerna med egenvärde 1.

Lösning. 52

(a) Vi har enligt definitionen ovan att

$$\langle x^2 | x \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = 0.$$

(b) På samma sätt

$$\begin{aligned}
\langle x^2 + 2 | x + 1 \rangle &= \int_{-1}^{1} (x^2 + 2) \cdot (x + 1) dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^3 + x^2 + 2x + 2 dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Enligt definitionen på längd av en vektor, får vi att

$$|x^2| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Lösning. 53

Vi börjar med att sätta $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 / |\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Därefter sätter vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1 \\
&= (1, 0, -1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,-1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\
&= (1, 0, -1) - \frac{1}{3} \langle (1,1,1) | (1,0,-1) \rangle (1,1,1) \\
&= (1, 0, -1) - 0(1,1,1)
\end{aligned}$$

Vi får således att $\mathbf{e}_2 = v_2 / |v_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. Slutligen,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (0,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (0,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{3} \langle (1,1,1) | (0,0,1) \rangle (1,1,1) - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \middle| (0,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \\
&= \frac{1}{3}(-1,-1,2) - \frac{1}{2} \langle (1,0,-1) | (0,0,1) \rangle (1,0,-1) \\
&= \frac{1}{3}(-1,-1,2) + \frac{1}{2}(1,0,-1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(-2,-2,4) + \frac{1}{6}(3,0,-3)$$
$$= \frac{1}{6}(1,-2,1)$$

Vi får således att $\mathbf{e}_3 = v_3/|v_3| = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

Vektorerna $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ samt $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ utgör alltså en ON-bas för samma rum som $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ spänner upp.

Lösning. 54

Vi använder oss av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ beteckna de tre kolonnerna i matrisen. Vi finner att $|\mathbf{f}_1| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$, och genom att normera $\mathbf{f}_1$ får vi den första vektorn i den ON-bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ som sökes. Således, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

Nästa steg är att använda oss av $\mathbf{f}_2$, men denna vektor är parallell med $\mathbf{e}_1$ så vi kan inte utvidga vår bas med $\mathbf{f}_2$.

Som tredje steg, använder vi då istället $\mathbf{f}_3$ och beräknar får enligt algoritmen

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_1 \\
&= (1,0,1)^T - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \middle| (1,0,1)^T \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \\
&= (1,0,1)^T - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (1,1,1)^T \\
&= \frac{1}{3}(1,-2,1)^T
\end{aligned}$$

Det återstår att normera $\mathbf{v}_3$, och då $\mathbf{v}_3$ är parallell med vektorn $(1,-2,1)^T$ räcker det att normera denna. Vi finner att $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

Vi har nu slut på kolonner att använda ur matrisen, så vi måste själva utvidga $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ med en till vektor. Här kan man ansätta vilken vektor som helst som inte ligger i det linjära höljet av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Här väljer vi vektorn $\mathbf{f}_4 = (1,-1,0)$ då denna är ortogonal mot $\mathbf{e}_1$ så beräkningarna blir något lättare:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{f}_4 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (1,-1,0)^T - \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \middle| (1,-1,0)^T \right\rangle}_{=0 \text{ enl val}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= (1,-1,0)^T - 0 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T \middle| (1,-1,0)^T \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T \\
&= (1,-1,0)^T - \frac{1}{6}\left\langle (1,-2,1)^T \middle| (1,-1,0)^T \right\rangle (1,-2,1)^T \\
&= (1,-1,0)^T - \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot (1,-2,1)^T \\
&= (1,-1,0)^T - \frac{1}{2}(1,-2,1)^T \\
&= \frac{1}{2}(1,0,-1)^T
\end{aligned}$$

Normerar vi nu denna vektor, får vi $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$.

Sammanfattningsvis, vektorerna $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ samt $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$ utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$, där de två första vektorerna är en ON-bas för kolonnrummet till matrisen given i uppgiften.

Lösning. 55

Vi börjar med att ta fram vektorer som spänner upp U, och utvidga dessa till en bas för $\mathbb{R}^3$. Vi ställer upp de givna vektorerna som kolonner i en matris, tillsammans med enhetskolonnerna. Därefter gausseliminerar vi tills matrisen är på trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektorerna på position 1, 2 och 5 i den ursprungliga matrisen är då en bas för $\mathbb{R}^3$ där de två första även är en bas för U. Vi utför då Gram-Schmidt på dessa tre vektorer i denna ordning, nämligen med $\mathbf{f}_1 = (1,1,1), \mathbf{f}_2 = (1,0,3)$ och $\mathbf{f}_3 = (1,0,0)$.

Vi får att $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1/|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Nu,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1 \\ &= (1,0,3) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,3) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ &= (1,0,3) - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (1,1,1) \\ &= (-1,-4,5)/3 \end{aligned}$$

Normerar vi denna vektor får vi att $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}(-1,-4,5)$. Vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är nu alltså en ON-bas för U. Fortsätter vi, ett steg till i algoritmen, får vi slutligen en ON-bas för $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\ &= (1,0,0) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \middle| (1,0,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ &- \left\langle \frac{1}{\sqrt{42}}(-1,-4,5) \middle| (1,0,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{42}}(-1,-4,5) \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{42}(-1)(-1,-4,5) \\ &= (42,0,0) - (14,14,14) + (-1,-4,5) \\ &= (27,-18,-9)/42 \end{aligned}$$

Normerar vi denna vektor får vi slutligen $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,-1)$. Vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ utgör alltså en ON-bas i $\mathbb{R}^3$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ spänner upp rummet U.

Lösning. 56
Vi följer uppmaningen, och börjar med Gram-Schmidt på $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0)$ och $\mathbf{f}_2 = (1,1,1,1)$. Eftersom den första vektorn redan har längd 1, så får vi $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$. Nu,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1|\mathbf{f}_2\rangle \mathbf{e}_1 \\ &= (1,1,1,1) - \langle (1,0,0,0)|(1,1,1,1)\rangle (1,0,0,0) \\ &= (1,1,1,1) - 1\cdot(1,0,0,0) \\ &= (0,1,1,1).\end{aligned}$$

Normerar vi denna vektor fås $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,1)/\sqrt{3}$. Om vi nu utvidgar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$, så kan vi skriva $\mathbf{u} = (1,0,0,-2)$ som $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4$. Den ortogonala projektionen på U innebär att vi endast har med de komponenter som finns i U, nämligen $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$. Sats 12.4 ger nu att $a_1 = \langle \mathbf{e}_1|\mathbf{u}\rangle$ och $a_2 = \langle \mathbf{e}_2|\mathbf{u}\rangle$. Vi får då att $a_1 = \langle (1,0,0,0)|(1,0,0,-2)\rangle = 1$ samt $a_2 = \left\langle (0,1,1,1)/\sqrt{3}\middle|(1,0,0,-2)\right\rangle = -2/\sqrt{3}$. Det följer att

$$\mathbf{u}_{proj} = 1\mathbf{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0) - \frac{2}{3}(0,1,1,1) = \left(1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Vi är nu klara.

Lösning. 57
Vi har vektorerna $\mathbf{f}_1 = x$ och $\mathbf{f}_2 = x^2$. Genom Gram-Schmidts process kan vi svara på första frågan.

Först måste vi normera $\mathbf{f}_1$. Detta görs genom att beräkna

$$|\mathbf{f}_1|^2 = \langle \mathbf{f}_1|\mathbf{f}_1\rangle = \int_0^1 x\cdot x dx = \frac{1}{3}.$$

Alltså gälller det att $|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vi sätter då $\mathbf{e}_1 = \sqrt{3}x$.

I andra steget, sätter vi

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1|\mathbf{f}_2\rangle \mathbf{e}_1 &= x^2 - \left\langle \sqrt{3}x \middle| x^2\right\rangle \sqrt{3}x \\ &= x^2 - 3\left(\int_0^1 x\cdot x^2 dx\right) x = x^2 - \frac{3}{4}x\end{aligned}$$

Vi måste nu normera $\mathbf{v}_2$.

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}_2|^2 &= \left\langle x^2 - \frac{3}{4}x \middle| x^2 - \frac{3}{4}x\right\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)^2 dx = \int_0^1 x^4 - \frac{3x^3}{2} + \frac{9x^2}{16} dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{9x^3}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{80}.\end{aligned}$$

Alltså, $\mathbf{e}_2 = \sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)$.

Sammanfattningsvis, vektorerna $\sqrt{3}x$ och $\sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)$ är alltså en ON-bas för U. Vi kan nu använda oss av att

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_i,$$

om $\mathbf{e}$ är en ON-bas, för att bestämma projektionen av $\mathbf{u} = 1 + 2x$ på U.

Vi har helt enkelt att denna projektion ges av

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{proj} &= \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_2 \\
&= \left\langle \sqrt{3}x \middle| 1 + 2x \right\rangle \sqrt{3}x + \left\langle \sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \middle| 1 + 2x \right\rangle \sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \\
&= 3\left(\int_0^1 x(1+2x)dx\right) \cdot x + 80\left(\int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)(1+2x)dx\right) \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \\
&= 3 \cdot \frac{7}{6}x + 80 \cdot \frac{41}{24} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \\
&= \frac{410x^2}{3} - 99x.
\end{aligned}$$

Lösning. 58

Första steget är att finna en bas för $U \cap V$. Detta ställer vi upp med gauss-elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) = \text{Använd rad 2, byt plats på rad 1 \& 2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) = \text{Eliminera mha rad 2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{array}\right) = \text{Använd rad 4, byt plats på rad 3 \& 4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2
\end{array}\right)$$

Vi ser att $\mathbf{f}_1 = (0, -2, 0, -2)$ spänner upp $U \cap V$. Om vi nu sätter $\mathbf{f}_2 = (1, 0, 0, 0)$ så spänner $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ upp U. Vektorerna i vänsterledet ovan spänner upp $U + V$ och den tredje radvektorn i VL är linjärt oberoende från $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. Om vi då sätter $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1, 0)$ så spänner $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ upp $U + V$.

Utför vi Gram-Schmidt på vektorerna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ samt en till vektor, får vi på samma gång alla ON-baser som eftersöks.

Normerar vi $\mathbf{f}_1$ får vi $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, -1)$.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{e}_1$$

$$= (1,0,0,0) - \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \middle| (1,0,0,0) \right\rangle}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)$$
$$= (1,0,0,0)$$

Denna vektor har längd 1, så vi kan då sätta $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0)$. Tredje vektorn fås genom att utvidga med $\mathbf{f}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{f}_3 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_3 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_1 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_3 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_2 \\ &= (0,0,1,0) \end{aligned}$$

och här har vi också tur med beräkningarna, det visade sig att $\mathbf{f}_3$ redan var vinkelrät mot $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Vi sätter då $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, som är normerad.

Slutligen, för att utvidga $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till en bas för $\mathbb{R}^4$ så behöver vi utföra Gram-Schmidt på en fjärde vektor. Vi väljer $\mathbf{f}_4 = (0,0,0,1)$ som är ortogonal mot både $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ och detta underlättar beräkningarna:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_4 &= \mathbf{f}_4 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{f}_4 \rangle \mathbf{e}_1 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{f}_4 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_2 - \underbrace{\langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{f}_4 \rangle}_{=0} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_4 &= (0,0,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \middle| (0,0,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \\ &= (0,0,0,1) - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (0,-1,0,-1) \\ &= (0,0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,0,1) \\ &= \frac{1}{2}(0,-1,0,1). \end{aligned}$$

Normerar vi denna vektor, får vi $\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$. Sammanfattningsvis, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ och $\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$ där $\mathbf{e}_1$ är en ON-bas för $U \cap V$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är en ON-bas för U, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är en ON-bas för $U + V$ och $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

Lösning. 59

Låt oss kalla avbildningsmatrisen till T i den givna basen för A. Vi vet då att $A(1,0,0,0)^T = A(1,0,2,0)^T = (0,0,0,0)^T$ och att $A(1,1,1,1)^T = (1,1,1,1)^T$ samt att $A(1,1,-1,-1)^T = 2(1,1,-1,-1)^T$. Detta kan sammanfattas som

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi löser ut A genom att beräkna en matrisinvers och får att

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Från denna matris kan vi nu beräkna allt som efterfrågas.

Vi kan dock vara lite effektivare och inse att vektorerna $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 2, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ samt $(1, 1, -1, -1)$ är linjärt oberoende. De två första vektorerna ligger i A:s nollrum, ty de avbildas på nollvektorn. De två sistnämnda måste då spänna upp A:s värderum. Det är klart att vi inte kan ha högre dimension än två för A:s värderum, eftersom A:s nollrum har minst dimension två.

Genom att fundera lite, eller använda Gram-Schmidt inser vi att vektorerna $(1, 0, 0, 0)$ och $(0, 0, 1, 0)$ spänner upp A:s nollrum och är en ON-bas för detta rum. På liknande sätt finner vi att vektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$ är en ON-bas för A:s värderum.

För att svara på fråga (b), noterar vi att

$$(20, 2, -30, 0) = 33(1, 0, 0, 0) - 15(1, 0, 2, 0) + (1, 1, 1, 1) + (1, 1, -1, -1)$$

Det följer då att

$$\begin{aligned} T(20, 2, -30, 0) &= 33T(1, 0, 0, 0) - 15T(1, 0, 2, 0) + T(1, 1, 1, 1) + T(1, 1, -1, -1) \\ &= 0 - 15 \cdot 0 + (1, 1, 1, 1) + 2(1, 1, -1, -1) \\ &= (3, 3, -1, -1). \end{aligned}$$

E-mail address: `per.w.alexandersson@gmail.com`