EXEMPEL OCH LÖSNINGAR I LINJÄR ALGEBRA

PER ALEXANDERSSON

Sammanfattning. Detta kompendie är främst avsett som ett komplement till Tengstrands *Linjär algebra med vektorgeometri*, [Ten05]. Materialet innehåller exempel som till stor del är snarlika de problem som finns i den boken. Jag rekommenderar att du som läsare själv försöker lösa problemet innan du kikar på lösningen, eller åtminstånde funderar på hur du skulle angripa problemet. Upplägget är anpassat till första terminens matematikstudier vid Stockholms Universitet.

Innehåll

1. Introduktion

Linjär algebra är en av de mest tillämpbara grenarna inom matematiken du kommer stöta på. Lösningar till linjära ekvationssystem är det som ger oss bilder från en magnetröntgen. Google använder gigantiska matriser för att representera länkar mellan sidor på internet, och använder sedan linjär algebra för att beräkna vilka sidor som hamnar överst när man söker efter något.

Vektorer är det språk som man använder när man talar om kraft och rörelse. För att modellera en biljardstöt eller vilken annan rörelse som helst, så är linjär algebra det perfekta redskapet. Du har antagligen redan använt linjär algebra inom fysiken utan att veta om det.

Linjära avbildningar är ett kapitel som man verkligen måste behärska om man vill tillverka 3D-grafik. En 3D-motor till ett dataspel innehåller med all säkerhet

Version: 8. december 2019,22:01.

en hel del avbildningar som beskriver hur man skall avbilda texturer på ytor, och mycket annat. Varje modern film som använder någon form av dataeffekt har använt sig av linjära avbildningar i skapandet av virtuella objekt och miljöer.

För mig som hobbyprogrammerare är det ett verktyg jag inte skulle klara mig utan. Även ett så enkelt spel som Pong skulle vara omöjligt att tillverka utan kunskaper från linjär algebra.

Uppdatering 2019-12-08: Figurer uppdaterade. Mailaddress uppdaterad. Ett par mindre korrigeringar.

2. Linjära ekvationssystem

När vi löser ett ekvationssystem, så är målet att gausseliminera genom att addera och subtrahera rader från varandra tills vi har löst ut så många variabler som möjligt. Man kan fråga sig varför detta tillvägagångssätt fungerar, och det skall vi nu undersöka. Vi observerar att raden $ax + by + cz = d$ säger precis lika mycket som likheten $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = \lambda d$ om $\lambda \neq 0$ eftersom vi kan dividera med λ och återfå ursprungliga likheten. Om vi har två eller flera ekvationer,

$$(*) \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{cases}$$

så kan man addera ett led av en ekvation till en annan:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + (c_1 + c_2)z & = d_1 + d_2. \end{cases}$$

Detta kan vi också göra baklänges, genom att helt enkelt subtrahera första raden från den andra. Alltså har vi inte förlorat någon information genom att addera en rad i ett ekvationssystem till ett annat. För att sammanfatta, så kan vi multiplicera rader med konstanter, samt addera och subtrahera olika rader från varandra. Sätter man samman dessa två regler, så är systemet $(*)$ ekvivalent med följande för alla $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ (\lambda a_1 + a_2)x + (\lambda b_1 + b_2)y + (\lambda c_1 + c_2)z & = \lambda d_1 + d_2. \end{cases}$$

Genom att välja λ så att $\lambda a_1 + a_2 = 0$, så har man gjort en eliminering, eftersom variablen x inte längre ingår i den andra ekvationen. Den resulterande ekvationen är alltså "enklare". Processen att förenkla ekvationssystem på det här sättet kallas Gauss-elimination. Det räcker att bara hålla koll på koefficienterna så man skriver om ekvationssystem på matrisform istället:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$$

Problem 1. *Lös ekvationssystemet*

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 3 \\ x - y - 3z & = 2 \\ 3x - y + 2z & = 1 \end{cases}.$$

Lösning. Vi ställer upp ekvationssystemet på matrisform, så vi skriver bara ned koefficienterna framför variablerna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Nu börjar vi gausseliminera:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera rad 1 från rad 2}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera } 3\times \text{ rad 1 från rad 3}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{array}\right) \sim \{\text{multiplicera rad 3 med } -\frac{1}{4}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera rad 3 från rad 1}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \{\text{addera } 2\times \text{ rad 3 till rad 2}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \{\text{multiplicera rad 2 med } -\frac{1}{3}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera rad 2 från rad 3 och rad 1}\} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera rad 2 från rad 3}\}
\end{aligned}$$

Översätter vi nu denna matrisform över till ett ekvationssystem igen, så finns bara $x = 2, z = -1, y = 3$ kvar. Alltså är lösningen till ekvationssystemet $x = 2, y = 3, z = -1$. $\square$

Problem 2. *Lös ekvationssystemet*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z &= -2 \\ 2x - 2y + 1z &= 3 \\ 6x - y - 2z &= 4 \end{cases}.$$

Lösning. Vi ställer upp det som en matris och börjar gausseliminera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \{\text{Eliminera vänstra kolonnen med rad ett.}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \end{array}\right) \sim \{\text{Dividera med -5 och -10 i rad 2 och 3}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Vi ser nu att de två sista raderna är identiska, så vi förlorar ingen information genom att stryka en av dessa. Vi har då kvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \{\text{Eliminera med hjälp av rad 2}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \{\text{Dividera första raden med 2}\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Vi kan nu inte gausseliminera mer, så om vi nu skriver om detta som ekvationer igen, så har vi ekvationerna $x - z/2 = 1/2$, samt $y - z = -1$. Vi löser ut x och y, och får att $x = (1+z)/2$, $y = z-1$. Vi har alltså oändligt många lösningar, som beror på z. För att tydliggöra detta, sätter man $z = t$. Då beror x, y och z på t och man säger att t parametriserar lösningarna. Vi har slutligen $(x, y, z) = (1/2 + t/2, t - 1, t)$, och för varje $t \in \mathbb{R}$ så har vi en lösning. Testa själv att för t.ex. $t = 2$ så är $(x, y, z) = (3/2, 1, 2)$ en lösning till ekvationssystemet. □

Problem 3. *Lös följande ekvationssystem för alla värden på parametern a:*

$$\begin{cases} x + 2y + az & = 6 \\ 2x - 2y + 4z & = 2 \\ 3x - 2y + 3az & = 10 \end{cases}.$$

Lösning. Vi skiver om på matrisform och gausseliminerar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 6 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 3a & 10 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera } 2 \times \text{ rad 1 från rad 2}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 6 \\ 0 & -6 & 4-2a & -10 \\ 3 & -2 & 3a & 10 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera } 3 \times \text{ rad 1 från rad 3}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 6 \\ 0 & -6 & 4-2a & -10 \\ 0 & -8 & 0 & -8 \end{array}\right) \sim \{\text{dividera sista raden med } -8, \text{ och fortsätt.}\}$$

$$(*) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & 4-2a & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nu vill vi gärna dividera mittersta raden med $4-2a$, men vi får aldrig dividera med 0. Vi kan bara dividera under förutsättningen att $4-2a \neq 0$. Vad händer om $4-2a=0$? Vi får helt enkelt dela upp det i två fall.

Fall 1: $4-2a \neq 0$. Under dessa förutsättningar kan vi dividera och får då efter förkorning att $(*)$ blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2/(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \{\text{subtrahera } a\times \text{ rad 2 från rad 1}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4-2a/(a-2) \\ 0 & 0 & 1 & 2/(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Uttrycket för x skriver vi om på gemensam nämnare och förenklar:

$$4-\frac{2a}{a-2}=\frac{4(a-2)}{a-2}-\frac{2a}{a-2}=\frac{4a-8-2a}{2-a}=\frac{2a-8}{a-2}$$

Lösningen då $4-2a \neq 0 \iff a \neq 2$ blir då

$$\begin{cases} x=\frac{2a-8}{a-2} \\ y=1 \\ z=\frac{2}{a-2} \end{cases}$$

Men vi är inte klara, vi har fortfarande ett fall kvar att undersöka.

Fall 2: $4-2a=0$. Detta inträffar precis då $a=2$, och detta värde på a sätter vi in i $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Den mittersta raden säger att $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=-4$ vilket aldrig kan uppfyllas. Ekvationssystemet saknar därför lösningar då $a=2$. Lösningarna vi fann i första fallet är alltså de enda lösniningarna. $\square$

Problem 4. *Lös följande ekvationssystem för alla värden på parametern* a :

$$\begin{cases} (1+a)x+(2-2a)y+(-2)z & =2 \\ 3x-3y-2z & =2 \\ (6a-2)x+(1-6a)y+(2-4a)z & =4+4a \end{cases}.$$

Lösning. Vi använder den vanliga metoden och börjar gausseliminera. Här gäller det att verkligen se till att man inte slarvar, för det kommer bli jobbiga uträkningar. Vi skriver om på matrisform och dividerar mittenraden med 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 2-2a & -2 & 2 \\ 1 & -1 & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ 6a-2 & 1-6a & 2-4a & 4+4a \end{array}\right) \sim \{\text{Eliminera mha mittenraden}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3-a & \frac{2a-4}{3} & \frac{4-2a}{3} \\ 1 & -1 & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \end{array}\right)$$

Det blev genast bättre. Vi fortsätter att eliminera i mittersta och första raden med hjälp av sista raden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3-a & \frac{2a-4}{3} & \frac{4-2a}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-4}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{52-18a}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-4}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \end{array}\right)$$

Det kan kännas frestande att multiplicera första raden med 3 för att slippa nämnare, men eftersom vi har 3 i nämnaren i högerledet, så låter vi det vara. Vi eliminerar nu med hjälp av första raden och får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{52-18a}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 30-12a \\ 0 & -1 & 0 & 6a-12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 26-9a \\ 1 & 0 & 0 & 30-12a \\ 0 & 1 & 0 & 12-6a \end{array}\right)$$

Vi har då lösningarna

$$\begin{cases} x = 30-12a \\ y = 12-6a \\ z = 26-9a \end{cases}.$$

Kunde vi löst systemet på något enklare sätt? Om vi funderar lite när vi eliminerar och letar efter parallella vektorer, (vektorer där ena vektorn är en multipel av den andra), så kan vi göra uträkningarna betydligt enklare. Se alternativ lösning i Problem 5. □

Problem 5. *Lös ekvationssystemet i exempel 4 genom att eliminera smart.*

Lösning. Vi ställer upp systemet på matrisform men vi dividerar inte mittenraden med 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 2-2a & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ 6a-2 & 1-6a & 2-4a & 4+4a \end{array}\right)$$

Här observerar vi att koefficienterna framför a i tredje raden är $(6, -6, -4)$ vilket är parallellt med koefficienterna $(3, -3, -2)$ i rad 2. Så vi subtraherar $2a$ gånger rad 2 från rad 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 2-2a & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 2-2a & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Nu observerar vi att koefficienterna framför a i första raden stämmer överens med andra raden. Vi eliminerar då alla a i första raden genom att subtrahera a gånger rad två från rad ett. Därefter används mittenraden till att eliminera i övriga rader:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2-6a \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & -4-6a \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Vi dividerar första raden med 2, för att sedan addera den till rad två och tre:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -2-3a \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -2-3a \\ 1 & 0 & -1 & 4-3a \\ 0 & -1 & 1 & 14-3a \end{array}\right)$$

Addera 2 gånger rad 3 till rad 1 och använd sedan rad 1 för att eliminera resten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 26-9a \\ 1 & 0 & -1 & 4-3a \\ 0 & -1 & 1 & 14-3a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 26-9a \\ 1 & 0 & 0 & 30-12a \\ 0 & -1 & 0 & 6a-12 \end{array}\right)$$

Detta ger $(x, y, z) = (30 - 12a, 12 - 6a, 26 - 9a)$ och vi är klara. $\square$

3. Matriser

Det finns mycket att säga om matriser, men det absolut viktigaste är att komma ihåg att matrismultiplikation *inte* är kommutativ. Detta innebär att om A och B är kvadratiska matriser, så gäller det oftast att $AB \neq BA$.

Vi kommer att använda bokstaven E för att beteckna enhetsmatrisen. Det är en matris med ettor på diagonalen, och nollor på alla andra platser. Storleken på matrisen är underförstått i dess sammanhang.

En viktig definition att komma ihåg är att om A och B är kvadratiska matriser så att $AB = BA = E$, så är B *inversen* till A. Detta betecknas som $B = A^{-1}$. En matris kommuterar alltid med sin invers, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Problem 6. *Finn den* $2 \times 2-$*matris* X *som löser matrisekvationen* $AX + B = C$ *där*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \; \text{och } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi börjar med att skriva om ekvationen som $AX = C - B$. Vi beräknar sedan $C - B$ och får att

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sätter vi nu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

så blir ekvationen vi vill lösa följande:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrismultiplikation ger att

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 + 4x_3 & 2x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alla element i matriserna på båda sidorna måste stämma överens, så vi får följande ekvationssystem som vi löser:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 & = 0 \\ x_2 + 3x_4 & = 2 \\ 2x_2 + 4x_4 & = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 3x_3 & = 1 \\ -2x_3 & = -2 \\ x_2 + 3x_4 & = 2 \\ -2x_4 & = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 & = -2 \\ x_3 & = 1 \\ x_2 & = -1 \\ x_4 & = 1 \end{cases}$$

Alltså är $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alternativt kan man finna X genom att vi vet

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och därför bara behöver beräkna matrisinversen i högerledet. □

Problem 7. *Finn alla kolonnvektorer* $\mathbf{v}$ *så att* $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, *där*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi vill finna $\mathbf{v} = (x, y, z)$ så att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x + 2y + 4z \\ 2x + 2z \\ 3x + y + 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alla tre koordinaterna måste vara lika i VL och HL samtidigt, så vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 4z & = x \\ 2y + 2z & = y \\ 3x + y + 6z & = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + 4z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \\ 3x + y + 5z & = 0 \end{cases}$$

Detta löser vi genom att skriva om på matrisform och lösa med gausselimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Eftersom kolonnen som motsvarar z inte är en enhetskolonn, så parametriserar vi $z = t$. Då är $x = -t$ och $y = -2t$. De vektorer $\mathbf{v}$ som är på formen $t(-1, -2, 1)$ där $t \in \mathbb{R}$ är då de vektorer som uppfyller $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. □

Problem 8. *Bestäm* a *och* b *så att matriserna*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & b \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$$

kommuterar.

Lösning. Låt oss kalla första matrisen för X och den andra för Y. Matriserna kommuterar om $XY = YX$. Vi behöver alltså bara beräkna de två produkterna, och undersöka vad som måste gälla. Matrismultiplikation ger att

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3a & b+6 & 3b-1 \\ a & 2b+2 & b-2 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} 1 & 3a & a \\ a & b+6 & 2b+2 \\ 0 & 3b-1 & b-2 \end{pmatrix}$$

Tittar vi i första raden, tredje kolumnen, så måste $a = 0$. I andra raden, tredje kolumnen, så måste $3b - 1 = 2b + 2$, så $b = 3$. Sätter vi in dessa värden överallt, så ser vi att produkterna verkligen blir lika och det är bara för dessa värden på a och b som matriserna kommuterar. □

Problem 9. *Matriserna A och B är kommuterande kvadratiska matriser av samma storlek, där $A^5 = B^5 = 0$. Visa att $(A+B)^{10} = 0$.*

Lösning. Matriserna kommuterar, vilket innebär att $AB = BA$. Vi kan då använda oss av binomialsatsen och får att

$$(A+B)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} A^k B^{10-k}.$$

Om k är ett tal mellan 0 och 10, så gäller antingen $k \geq 5$ eller $10 - k \geq 5$. Detta betyder att minst en av matriserna förekommer med potens 5 i varje term i summan ovan. Då $A^5 = B^5 = 0$, så måste då varje term vara 0, och hela summan är därför 0. Alltså är $(A+B)^{10} = 0$.

Om A och B inte kommuterar, så gäller inte binomialsatsen: Till exempel så är $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, så vi ser här att binomialsatsen bara gäller om $AB = BA$. □

Problem 10. *Visa att om A är en kvadratisk matris så att $(A-E)(E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) = 0$, så är $A^k = A^{-1}$.*

Lösning. Vi manipulerar likheten genom att utveckla den första parentesen i uttrycket i högerledet, och sedan förenkla:

$$\begin{array}{rcl}
(A-E)(E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) & = & 0 \\
& \Longleftrightarrow & \\
A(E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) - E(E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) & = & 0 \\
& \Longleftrightarrow & \\
(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k + A^{k+1}) - (E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) & = & 0
\end{array}$$

Alla termer utom den sista i vänstra parentesen elimineras av något i den högra parentesen, och vi har bara kvar $A^{k+1} - E = 0$. Detta innebär att $A^{k+1} = E$ vilket betyder att $A(A^k) = E$. Då gäller det att $A^k = A^{-1}$. □

4. Determinanter

Först när man ägnar sig åt volymfunktioner och linjära avbildningar inser man hela nyttan med determinanter, och det är först där man förstår anledningen till varför formlerna för determinanter ser ut som de gör. Jag skall göra ett försök att förklara ungefär vad en determinant är.

Determinanter mäter volymen av de vektorer som matrisen består av, (matrisens rader), och detta avgör också om man kan invertera matrisen. Determinanten är samtidigt ett mått på hur mycket en matris förstorar en vektor vid matrismultiplikation.

Det är så man kan tolka alla formler: Avbildningen AB förstorar först med faktor $|B|$, sedan med faktor $|A|$. Totalt måste AB förstora lika mycket som att först förstora med B och sedan med A, så $|AB| = |A||B|$. Med samma motivering fås att $|AB| = |BA|$. Om jag på något sätt minskar något så att det försvinner, så kan jag omöjligt göra detta baklänges. En matris med determinant 0 måste alltså sakna invers.

Problem 11. *Finn $|B|$ givet att $|C| = 2$ och $CA^{-1}BAC^t = E$ där A, B och C är 3×3-matriser och A är inverterbar. Vilka av matriserna B och C är inverterbara?*

Lösning. Vi tar determinanten på båda sidor av den givna likheten och får

$$|CA^{-1}BAC^t| = |E|.$$

Använder man nu [Ten05, Sats 5.8] samt att $|E| = 1$ får vi att

$$|C||A^{-1}||B||A||C^t| = 1.$$

Vi vet att $|C| = 2$ och då att $|C^t| = 2$ enligt [Ten05, Sats 5.9], samt att $|A|\cdot|A^{-1}| = 1$ enligt [Ten05, Sats 5.12]. Detta ger oss att $2^2 \cdot |B| = 1$, så $|B| = 1/4$. En matris är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Vi ser att detta är sant för både B och C, så dessa har invers. $\square$

Problem 12. *För en viss matris A gäller det att $A^3 - A = 0$. Visa att minst en av matriserna A, $A - E$ och $A + E$ saknar invers.*

Lösning. Vi skriver om likeheten $A^3 - A = 0$ till $A(A^2 - E) = 0$ och sedan till $A(A - E)(A + E) = 0$ genom att använda konjugatregeln. Detta går att göra eftersom alla matriser som ingår kommuterar. Tar vi determinanten på båda sidor, så inser vi att $|A||A - E||A + E| = 0$, och om en produkt av tre tal är 0, så måste det gälla att minst ett av talen är 0. (Observera att detta *inte* innebär att någon av matriserna i produkten är nollmatrisen.) Så någon av determinanterna för matriserna A, $A-E$ och $A+E$ är noll, och den matrisen är då inte inverterbar. $\square$

Problem 13. *För vilka värden på a är determinanten till M nollskild, om*

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 10 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}?$$

Lösning. Vi beräknar determinanten med hjälp av Sarrus regel, som presenteras i [Ten05, Figur 5.10]. Det gäller då att

$$\begin{aligned} |M| &= (1-a)(2-a)a + 0\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 10\cdot 1 \\ &\quad -(1-a)\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 10\cdot a - 0\cdot(2-a)\cdot 1 \\ &= (2 - 2a - a + a^2)a - (1-a) \\ &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \end{aligned}$$

Det sista uttrycket bör man känna igen som $(a-1)^3$, och determinanten är alltså skild från noll om $a \neq 1$. $\square$

Problem 14. *Visa att oavsett värde på $a \in \mathbb{R}$ så är determinanten för nedanstående matris aldrig negativ:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

Lösning. Vi beräknar determinanten med Sarrus regel och får att denna blir

$$(a+1)(2a+1) + (a+1) + (a+1) - (a+1)^2 - (2a+1) - (a+1) = a^2$$

Eftersom kvadraten på ett reellt tal aldrig är negativ, har vi visat påståendet. $\square$

Problem 15. *Lös ekvationssystemet*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning. Vi beräknar determinanten med Sarrus regel och får att ovanstående blir

$$6x^2 + 8x^3 + 15x - 5x^3 - 12x - 12x^2 = 3x^3 - 6x^2 + 3x$$

Vi vill alltså lösa $3x^3 - 6x^2 + 3x = 0$ vilket efter division med 3 och faktorisering blir $x(x-1)^2 = 0$. Lösningarna blir då $x_1 = 0, x_2 = 1$. $\square$

Problem 16. *För vilka värden på a saknar följande ekvationssystem entydig lösning?*

$$\begin{cases} ax + 2y + 3 & = b \\ 3x - ay + az & = 10 \\ 3x + ay + az & = 4 \end{cases}$$

Lösning. Vi behöver inte lösa ekvationssystemet, vi vill bara veta när det blir en entydig lösning. Vi kan skriva systemet på formen $AX = B$, där

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 3 & -a & a \\ 3 & a & a \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om A har invers, så gäller $X = A^{-1}B$ och vi har entydig lösning. Vi behöver alltså bara ta reda på när A har invers, och detta sker precis då $|A| \neq 0$. Vi får att

$$|A| = -a^3 + 6a + 9a - a^3 - 6a + 9a = -2a^3 + 18a = -2a(a-3)(a+3).$$

Determinanten är 0 precis då a är -3, 0 eller 3. För alla andra värden på a har systemet entydig lösning. $\square$

Problem 17. *Givet att*

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} = 0, \; \textit{visa att} \; \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = 0$$

för godtyckliga värden på $e_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$.

Lösning. Villkoret att första determinanten är 0, implicerar att vektorerna (e_{11}, e_{12}) och (e_{21}, e_{22}) är linjärt beroende. Detta ger i sin tur att $(e_{11}, e_{12}, 0)$ och $(e_{21}, e_{22}, 0)$ är linjärt beroende. Eftersom en determinant är noll om några rader är linjärt beroende, så innebär detta att

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = 0$$

eftersom de två första raderna är linjärt beroende.

Det går även att lösa denna uppgift genom att utveckla determinanten med Sarrus regel, och inse att $e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12} = 0$ är en faktor. $\square$

5. Vektorer i planet och i rummet

Problem 18. *Låt* $\mathbf{e}_1 = (1,3)$ *och* $\mathbf{e}_2 = (-2,1)$. *Bestäm koordinaterna för punkterna* $(5,1)$ *och* $(1,10)$ *i basen* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Lösning. Första deluppgiften går ut på att hitta konstanter λ, μ så att $(5,1) = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$. Sätt in $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ och lös som ett ekvationssystem. Vi får $(5,1) = \lambda(1,3) + \mu(-2,1)$ och då måste systemet vara

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu &= 5 \\ 3\lambda + \mu &= 1 \end{cases}$$

Vi ställer upp det på matrisform och löser.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

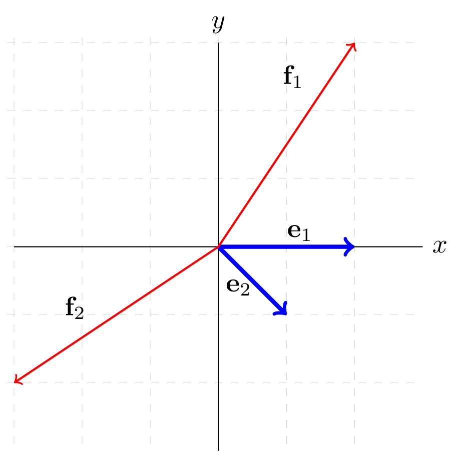
Alltså är $\lambda = 1$ och $\mu = -2$ så koordinaterna för $(5,1)$ i basen $\mathbf{e}$ blir $(1,-2)_\mathbf{e}$.

Vi använder precis samma metod för att lösa del två. Enda skillnaden nu är ett annat högerled i ekvationssystemet.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Alltså är koordinaterna för punkten $(1,10)$ i basen $\mathbf{e}$ lika med $(3,1)_\mathbf{e}$. □

Problem 19. *Uttryck* $\mathbf{f}_1$ *och* $\mathbf{f}_2$ *i* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$, *där alla vektorer finns i Figur 1. Bestäm basbytesmatrisen från* $\mathbf{e}$ *till* $\mathbf{f}$.



Figur 1. Basbyte mellan basvektorer.

Lösning. Koordinaterna för $\mathbf{f}_1$ är de (λ, μ) så att $\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1$. Detta innebär alltså att $\lambda(2,0) + \mu(1,-1) = (2,3)$ vilket leder till systemet

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= 2 \\ -\mu &= 3 \end{cases}$$

Detta behöver vi inte ens lösa med Gausselimination, vi har att $\mu = -3$ och detta ger att $\lambda = 5/2$. Således har vi att $\mathbf{f}_1 = (5/2, -3)_{\mathbf{e}}$. Samma lösningsmetod använder vi nu för att finna $\mathbf{f}_2$, och vi får

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= -3 \\ -\mu &= -2 \end{cases}$$

Här får vi att $\mu = 2$, och då är $\lambda = -5/2$. Detta ger att $f_2 = (-5/2, 2)_{\mathbf{e}}$. Att byta från basen $\mathbf{f}$ till $\mathbf{e}$ är nu enkelt, $(1, 0)_{\mathbf{f}}$ är ju $(5/2, -3)_{\mathbf{e}}$, och $(0, 1)_{\mathbf{f}}$ är $(-5/2, 2)_{\mathbf{e}}$. Då måste detta basbyte bli

$$T = \begin{pmatrix} 5/2 & -5/2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

eftersom om vi multiplicerar koordinater uttryckta i basen $\mathbf{f}$ med matrisen T från vänster, så får vi koordinaterna i basen $\mathbf{e}$. Vi är dock intresserade i matrisen som byter från $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$, så vi inverterar helt enkelt matrisen och får

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -1 \\ -\frac{6}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta är den basbytesmatris vi söker. □

Problem 20. *Är vektorerna* $(2, 3, 4), (4, 5, 6)$ *och* $(6, 7, 8)$ *linjärt oberoende?*

Lösning. Vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende om $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} + \lambda_3\mathbf{w} = 0$ garanterar att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Det får alltså inte finnas några andra lösningar till ekvationssystemet. Vi undersöker om så är fallet, och löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

Vi vet att detta system har entydig lösning (dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$) om determinanten för matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

är nollskilld. Vi beräknar determinanten och får att denna är

$$80 + 112 + 108 - 84 - 96 - 120 = 0$$

så detta innebär att vi inte har entydig lösning. Det finns alltså nollskilda tal, (till exempel $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$) som löser ekvationssystemet. Det gäller alltså att $(2, 3, 4) - 2(4, 5, 6) + (6, 7, 8) = 0$ och vektorerna är inte linjärt oberoende. Med andra ord, vektorerna är linjärt beroende. □

Problem 21. *För vilka värden på* $a \in \mathbb{R}$ *är vektorerna* $(1, -2, a), (4, -a, 2)$ *och* $(3, -2, a)$ *linjärt beroende?*

Lösning. Vi ställer upp det som ett ekvationssystem precis som i Problem 20. Vektorerna är linjärt beroende då följande determinant är 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -a & -2 \\ a & 2 & a \end{vmatrix} = -a^2 - 8a - 12 + 4 + 8a + 3a^2 = 2a^2 - 8$$

Det vill säga, vektorerna är linjärt beroende om $2a^2 - 8 = 0$, vilket sker då $a = \pm 2$. $\square$

Problem* 5.1. *(2009-08-17:3)*

(a) *Visa att vektorerna* $\mathbf{u} = (2, 1, -4)$, $\mathbf{v} = (8, -2, 5)$ *och* $\mathbf{w} = (0, -2, 7)$ *är linjärt beroende.*

(b) *Skriv en av vektorerna* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *som en linjärkombination av de övriga två.*

Lösning. Om vi kan skriva en av vektorerna som en linjärkombination av de övriga vektorerna, så är vektorerna linjärt beroende enligt definition. Det räcker alltså att lösa uppgift (b), eftersom detta visar att vektorerna är linjärt beroende. Vi vill alltså finna konstanter λ_1, λ_2 och λ_3 så att $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} + \lambda_3\mathbf{w} = 0$, men minst en av konstanterna är skild från 0. Detta kan vi lösa med ett ekvationssystem (precis som i Problem 20):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 21 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Fortsatt eliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Sätter vi nu $\lambda_3 = 3t$, så är $\lambda_2 = -t$ och $\lambda_1 = 4t$, och varje värde på $t \neq 0$ ger en giltig linjärkombination. Väljer vi $t = 1$, så får vi att $4\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w} = 0$, och vi kan lösa ut en av vektorerna genom till exempel $4\mathbf{u} + 3\mathbf{w} = \mathbf{v}$. [1] Vi har då uttryckt $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av de andra vektorerna. Nu är (b) löst, och då även problem (a).

En alternativ metod: Istället för att helt lösa ett ekvationssystem kan vi lika gärna betrakta ekvationen

$$\lambda_1(2, 1, -4) + \lambda_2(8, -2, 5) = \lambda_3(0, -2, 7).$$

Hittar vi *en* lösning till denna är vi i princip klara. $x-$koordinaterna i vänsterledet skall summeras till 0, eftersom det är värdet i högerledet. λ_1 måste då vara 4 gånger större än λ_2 men med omvänt tecken. Alltså måste $\lambda_1 = -4\lambda_2$. Detta medför att $\lambda_2 \neq 0$, så vi kan anta att $\lambda_2 = 1$. Då gäller att $-4\mathbf{u} + \mathbf{v} = \lambda_3\mathbf{w}$, så $(0, -6, 21) = \lambda_3(0, -2, 7)$. Vi ser då att $\lambda_3 = 1/3$, och vi kontrollerar lätt att $-4\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1/3)\mathbf{w}$. Nu är (b) löst, vilket medför att vi har visat (a). $\square$

Problem 22. *Låt O, A, B, C vara hörnen i en tetraheder, där punkten M ligger på OA så att $|OM| = \frac{1}{2}|OA|$, punkten N ligger på OB så att $|ON| = \frac{1}{3}|OB|$ och punkten K ligger på OC så att $|OK| = \frac{3}{4}|OC|$. Uttryck vektorn OP i OA, OB och OC där P är tyndpunkten i triangeln MNO.*

Lösning. Tyngdpunktsformeln [Ten05, sid 85] ger att

$$OP = \frac{1}{3}\left(OM + ON + OK\right).$$

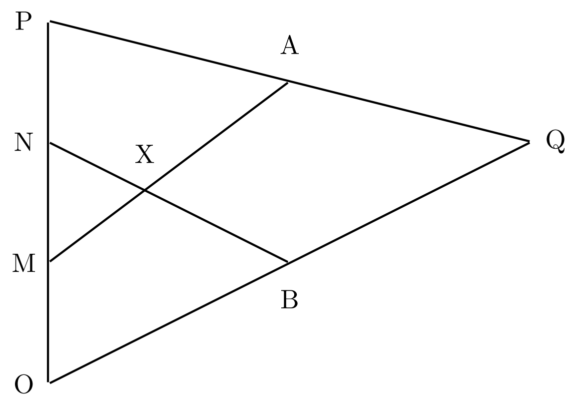
[1] Här är ett ställe där man kollar att summan i vänsterledet verkligen blir $\mathbf{v}$.

Vi kan nu byta ut OM, ON och OK enligt de angivna värdena och får att

$$OP = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}OA + \frac{1}{3}OB + \frac{3}{4}OC\right) = \frac{1}{6}OA + \frac{1}{9}OB + \frac{1}{4}OC.$$

□

Problem 23. *Givet är tre punkter i planet, O, P, Q som ej ligger på en linje. Punkterna M och N ligger på OP så att $|OM| = |MN| = |NP|$. Vidare ligger A på PQ och B på OQ så att $|PA| = |AQ|$ och $|OB| = |BQ|$. Sträckorna MA och NB skär i en punkt X. Uttryck vektorn OX i vektorerna OP och OQ.*



FIGUR 2. Rita en figur!

Lösning. Låt $\mathbf{u} = OP$ och $\mathbf{v} = OQ$. Då gäller det att $PQ = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{u} + PQ = \mathbf{v}$. Vi har också att $MA = MP + PA$, eftersom att gå från M till A är samma som att gå från M till P och sedan från P till A. Vi vet att sträckan MP är $2/3$ av sträckan OP, och att A ligger mitt på PQ. Alltså måste

$$MA = \frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{1}{6}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

Med ett liknande resonemang gäller det att

$$NB = NO + OB = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

Nu vill vi finna vektron OX. Att ta sig från O till X kan göras på flera sätt. Antingen går vi från O till N, och sedan en bit längs NB, eller så går man från O till M, och därefter en bit på MA. Detta uttrycker vi som

$$(*) \qquad \begin{cases} OX = ON + t \cdot NB \\ OX = OM + s \cdot MA \end{cases}$$

Vi kan då skriva upp likheten

$$ON + t \cdot NB = OM + s \cdot MA$$

eftersom både höger och vänster led är uttryck för OX. Vi sätter nu in de uttryck vi har för ON, NB, OM och MA :

$$\frac{2}{3}\mathbf{u} + t\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{2}{3}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{3}\mathbf{u} + s\left(\frac{1}{6}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\right)$$

Här flyttar vi över allt i vänsterledet och faktoriserar ut **u** och **v** :

$$\mathbf{u}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}s\right)+\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}s\right)=0$$

Vektorerna **u** och **v** är linjärt oberoende, eftersom O, P och Q ej ligger på en linje. Alltså kan ovanstående endast gälla om koefficienterna framför både **u** och **v** båda är 0. Vi får systemet

$$\begin{cases}\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}s=0\\ \frac{1}{2}t-\frac{1}{2}s=0\end{cases}$$

Efter att vi förenklar båda ekvationerna får vi

$$\begin{cases}\frac{1}{3}=\frac{2}{3}t+\frac{1}{6}s\\ s=t\end{cases}$$

Sätter vi in $s=t$ i första ekvationen fås $1/3=2s/3+s/6$ så $s=2/5$. Vi har från $(*)$ att $OX=OM+s\cdot MA$ så $OX=OM+\frac{2}{5}MA$. Detta ger

$$OX=\frac{1}{3}\mathbf{u}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}\right)$$

Förenklar vi detta får vi att

$$OX=\frac{2\mathbf{u}+\mathbf{v}}{5}=\frac{2}{5}OP+\frac{1}{5}OQ$$

och vi har nu uttryckt OX i vektorerna OP och OQ. □

Problem 24. *Visa att om ABC är en triangel, så ligger punkten P på sidan BC om $AP=s\cdot AB+t\cdot AC$ för något s, t så att $s,t\geq 0$ och $s+t=1$.*

Lösning. För alla punkter P på BC så gäller det att $AP=AB+r\cdot BC$ för något $r\in[0,1]$. Detta inses genom att vi börjar i punkten A och går till B. Från B går vi sedan andelen r av sträckan till C. På så sätt kan vi nå alla punkter på BC, men inga fler.

Vi skriver om $BC=BA+AC=AC-AB$ och sätter in i formeln:

$$AP=AB+r\cdot(AC-AB)\text{ för något }r\in[0,1].$$

Förenkling ger att

$$AP=(1-r)\cdot AB+r\cdot AC\text{ för något }r\in[0,1].$$

Vi ser då att om vi väljer $s=1-r$ och $t=r$ så kommer $s\geq 0$, $t\geq 0$ samt att $s+t=(1-r)+r=1$. Det är nu visat att om P ligger på BC, kan vi hitta s, t som uppfyller de sökta egenskaperna. □

6. Skalärprodukt

Problem 25. *Finn vinkeln mellan vektorerna* $(0,4,0)$ *och* $(3,5,4)$ *(ON-system).*

Lösning. Eftersom vektorerna är angivna i en ortonormerad bas, kan vi använda oss av formeln $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{v}_x+\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{v}_y+\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{v}_z$. Detta tillsammans med definitionen för skalärprodukten, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$ där α är vinkeln mellan **u** och **v** ger oss att

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{v}_x+\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{v}_y+\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{v}_z}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Sätter vi in talen givna i uppgiften får vi att

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{0\cdot 3+4\cdot 5+0\cdot 4}{\sqrt{0^2+4^2+0^2}\sqrt{3^2+5^2+4^2}}\\ &= \frac{20}{4\sqrt{50}}\\ &= \frac{20}{4\sqrt{2\cdot 5^2}}\\ &= \frac{20}{20\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Så cosinus för vinkeln mellan vektorerna är $1/\sqrt{2}$, och då måste vinkeln vara 45° eftersom $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$. □

Problem 26. *Bestäm alla tal a så att vinkeln mellan vektorn $(4,-3,0)$ och $(1,-1,a)$ är 60°. (ON-system).*

Lösning. Vi sätter in allt vi vet i formeln för skalärprodukt för att se vad som måste gälla. Om första vektorn är u och den andra är v, så måste $u\cdot v = |u||v|\cos 60°$. Alltså måste (eftersom $\cos 60° = 1/2$)

$$(4,-3,0)\cdot(1,-1,a) = |(4,-3,0)|\cdot|(1,-1,a)|\cdot\frac{1}{2}.$$

Eftersom koordinaterna är angivna i en ortonormerad bas, kan vi förenkla ovanstående ekvation till

$$4+3 = \frac{\sqrt{4^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{1+1+a^2}}{2}.$$

Ytterligare förenkling ger oss att

$$14 = 5\sqrt{2+a^2} \implies 196/25 = 2+a^2 \iff a = \pm\frac{\sqrt{146}}{5}.$$

Som vid alla gånger vi kvadrerar, bör vi kolla att rötterna inte är falska. Men eftersom båda sidorna omöjligt kan varit negativa när vi kvadrerade, så har vi ekvivalens. De lösningar vi funnit är därför korrekta. □

Problem 27. *Bestäm skalärprodukten $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ om $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{e}-2\mathbf{f}$ där $|\mathbf{e}| = 1$, $|\mathbf{f}| = 2$ samt att vinkeln mellan $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$ är 60°.*

Lösning. Hela lösningen på problemet är en övning i att använda räknelagarna för skalärprodukt, som du kan finna i kapitel 11. Definitionen av skalärprodukt säger att $\mathbf{e}\cdot\mathbf{f} = |\mathbf{e}||\mathbf{f}|\cos\alpha$ där α är vinkeln mellan $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$. Alla värden i högerledet vet vi från problemet, så

$$(*)\qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f} = 1\cdot 2\cdot\cos 60° = 1$$

Vi börjar nu manipulera uttrycket vi fick i uppgiften:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (2\mathbf{e}+3\mathbf{f})\cdot(\mathbf{e}-2\mathbf{f}) \\
&= \{\text{räknelag 3}\} \\
&= 2\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}-4\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}+3\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}-6\mathbf{f}\cdot\mathbf{f} \\
&= \{\text{räknelag 2}\} \\
&= 2\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}-\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}-6\mathbf{f}\cdot\mathbf{f} \\
&= \{\text{räknelag 4}\} \\
&= 2|\mathbf{e}|^2-6|\mathbf{f}|^2-\mathbf{e}\cdot\mathbf{f} \\
&= \{\text{värden vi vet samt } *\} \\
&= 2\cdot 1^2-6\cdot 2^2-1 \\
&= -23
\end{aligned}$$

Således, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-23$. □

Problem 28. *Finn vinkeln mellan vektorerna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *om* $\mathbf{u}=\mathbf{e}+\mathbf{f}$ *och* $\mathbf{v}=2\mathbf{e}-\mathbf{f}$ *där* $|\mathbf{e}|=|\mathbf{f}|=1$ *och vinkeln mellan* $\mathbf{e}$ *och* $\mathbf{f}$ *är* $60°$.

Lösning. Låt α vara vinkeln vi söker. Det gäller då att $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$. Vi behöver beräkna $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, samt $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Vi använder räknelagarna från kapitel 11 och får att

$$|\mathbf{u}|^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=(\mathbf{e}+\mathbf{f})(\mathbf{e}+\mathbf{f})=|\mathbf{e}|^2+2\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}+|\mathbf{f}|^2=2+2\cos 60°=3$$

På samma sätt får vi att

$$|\mathbf{v}|^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=(2\mathbf{e}-\mathbf{f})(2\mathbf{e}-\mathbf{f})=4|\mathbf{e}|^2-4\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}+|\mathbf{f}|^2=5-4\cos 60°=3.$$

Alltså är $|\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|=\sqrt{3}$. Det återstår att beräkna $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=(\mathbf{e}+\mathbf{f})(2\mathbf{e}-\mathbf{f})=2|\mathbf{e}|^2-\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}+2\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}-|\mathbf{f}|^2=1+\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=\frac{3}{2}$$

Vi sätter in alla värden i $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$ och får att

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} &= 3\cos\alpha \iff \\
\frac{1}{2} &= \cos\alpha
\end{aligned}$$

Detta innebär att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $60°$. □

Problem 29. *Bestäm den vektor man får om man projicerar vektorn* $(20,0,1)$ *på vektorn* $(2,14,5)$*, (ON-system).*

Lösning. Låt oss kalla första vektorn för $\mathbf{u}$ och den andra för $\mathbf{v}$. Då måste givetvis projektionen, som vi kallar $\mathbf{u}_v$, vara parallell med $\mathbf{v}$. Alltså gäller det att $\mathbf{u}_v=\lambda\mathbf{v}$ för något $\lambda\in\mathbb{R}$. Projektion sker alltid vinkelrätt så vektorn $\mathbf{u}-\mathbf{u}_v$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$. Alltså måste

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}-\mathbf{u}_v)\cdot\mathbf{v} &= 0 \iff \\
(\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} &= 0 \iff \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$, får vi nu att

$$\lambda = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}.$$

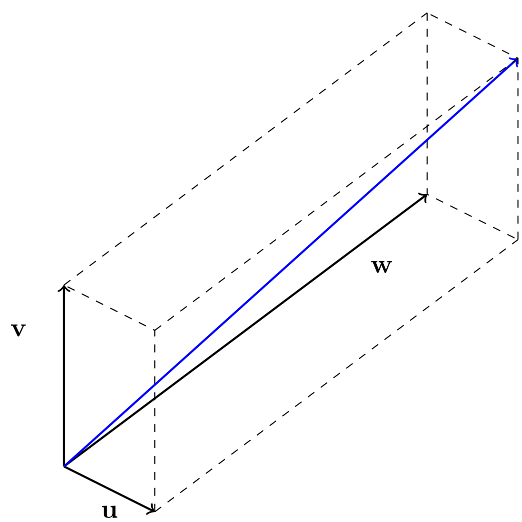
Sätter vi in våra vektorer i den här formeln får vi att

$$\lambda = \frac{(20,0,1)(2,14,5)}{2^2 + 14^2 + 5^2} = \frac{45}{225} = \frac{1}{5}.$$

Alltså är $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/5$ så projektionen är alltså $(2/5, 14/5, 1)$. □

Problem 30. *Ett rätblock har sidor med längderna* 1, 2 *och* 5 *cm. Bestäm vinkeln mellan den kortaste sidan och rymddiagonalen.*

Lösning. Vi låter vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ spänna upp sidorna med längderna 1, 2 och 5 som i Figur 3. Det som söks i uppgiften är vinkeln mellan vektorn $\mathbf{u}$ och vektorn



FIGUR 3. Rätblocket.

$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$. Med hjälp av avståndsformeln får vi att $|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}| = \sqrt{1^2+2^2+5^2} = \sqrt{30}$. Detta är alltså inget annat än avståndet mellan punkten $(0,0,0)$ och $(1,2,5)$. Om α är den vinkel som eftersöks, så säger formeln för skalärprodukt att

$$\frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})}{|\mathbf{u}||\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}|} = \cos\alpha.$$

Använder vi nu lagarna för skalärprodukt så får vi att

$$\frac{|\mathbf{u}|^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}|\sqrt{30}} = \cos\alpha.$$

Vi kan nu använda oss av att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är $90°$. Detta innebär att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$. Vi har också att $|\mathbf{u}| = 1$. Alltså gäller

$$\frac{1}{\sqrt{30}} = \cos\alpha.$$

Detta ger att α är $\arccos(1/\sqrt{30})$. Eftersom $1/\sqrt{30}$ nästan är 0, så måste α vara nästan $90°$, vilket känns rimligt om vi tittar på figuren. □

7. Vektorprodukt, area och volym

Problem 31. *Bestäm arean av det parallellogram som spänns upp av vektorerna* $(1,2)$ *och* $(4,5)$*, (ON-system)*

Lösning. Arean av parallellogrammet lika stor som determinanten av matrisen med de uppspännande vektorerna som rader. Arean ges därför av

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3.$$

Kom ihåg att tecknet har med orienteringen av vektorerna att göra, den verkliga arean är alltid positiv, så arean måste vara 3 areaenheter. □

Problem 32. *Bestäm arean för det parallellogram som spänns upp av vektorerna* $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ *och* $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ *om arean av det parallellogram som* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *spänner upp är 2 a.e.*

Lösning. Den söka arean är $|(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(3\mathbf{u}+4\mathbf{v})|$ enligt definitionen för vektorprodukt. Vi kan då förenkla detta uttryck med räknelagarna för vektorprodukten (som finns i kapitel 11).

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(3\mathbf{u}+4\mathbf{v})| &= |(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(3\mathbf{u})+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(4\mathbf{v})| \\ &= |\mathbf{u}\times(3\mathbf{u})-\mathbf{v}\times(3\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(4\mathbf{v})-\mathbf{v}\times(4\mathbf{v})| \\ &= |3(\mathbf{u}\times\mathbf{u})-3(\mathbf{v}\times\mathbf{u})+4(\mathbf{u}\times\mathbf{v})-4(\mathbf{v}\times\mathbf{v})| \end{aligned}$$

Det gäller att $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=0$, eftersom arean som en vektor spänner upp med sig själv är 0. Det gäller också att $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, så ovanstående förenklas då till $|3(\mathbf{u}\times\mathbf{v})+4(\mathbf{u}\times\mathbf{v})| = 7|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$. Vi vet att $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=2$, eftersom vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp precis arean 2. Således måste $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ och $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ spänna upp en area som är 14 a.e. □

Problem 33. *Bestäm arean av det parallellogram som spänns upp av vektorerna* $(2,2,3)$ *och* $(4,1,3)$*. (ON-system)*

Lösning. För att finna arean av parallellogrammet, så måste vi beräkna längden av vektorprodukten $(2,2,3)\times(4,1,3)$. Detta följer direkt från definitionen[2] av vektorprodukt: $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ är arean av det parallellogram som vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp. Jag beräknar vanligtvis vektorprodukten som en determinant, och får att

$$\begin{aligned} (2,2,3)\times(4,1,3) &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \\ &= 2e_3+6e_1+12e_2-6e_2-8e_3-3e_1 \\ &= 3e_1+6e_2-6e_3=(3,6,-6) \end{aligned}$$

Arean ges då av $|(3,6,-6)| = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$. □

Problem 34. *Bestäm volymen av den tetraheder som har hörnen* $(0,0,1)$*,* $(1,2,2)$*,* $(2,0,1)$ *och* $(1,1,1)$*. (ON-system)*

---

[2] [Ten05, Definition 5.2]

Lösning. Vi väljer ett hörn i tetrahedern, $(0,0,1)$ och från detta hörn utgår tre vektorer som spänner upp kroppen. Vektorerna blir då

$$
\begin{aligned}
(1,2,2)-(0,0,1) &= (1,2,1)\\
(2,0,1)-(0,0,1) &= (2,0,0)\\
(1,1,1)-(0,0,1) &= (1,1,0)
\end{aligned}
$$

Vi beräknar volymen av tetrahedern genom att ställa upp vektorerna som rader i en matris och därefter beräkna dess determinant. Determinanten beräknar dock volymen av parallellepipeden som vektorerna spänner upp, så vi måste dividera med sex för att få volymen av tetrahedern.

$$
\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 1) = \frac{1}{3}
$$

□

Problem 35. *Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna* $\mathbf{u} = \mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}-\mathbf{f}+\mathbf{g}$ *och* $\mathbf{w} = 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}$ *där vektorerna* $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ *och* $\mathbf{g}$ *spänner upp ett rätblock med volym 2.*

Lösning. Det här exemplet använder flitigt reglerna för volymfunktionen. Dessa finns i kapitel 11. Det vi söker är $V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{e}-\mathbf{f}+\mathbf{g}, 2\mathbf{e}+3\mathbf{f})$. Vi manipulerar

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{e}-\mathbf{f}+\mathbf{g}, 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}) &= \{\text{skriv om lite}\}\\
V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, (\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g})-2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}) &= \{\text{använd regel 1}\}\\
V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}) &\\
+V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}) &= \{\text{regel 4}\}\\
V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}+3\mathbf{f}) &= \{\text{använd regel 1}\}\\
V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}) + V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 3\mathbf{f}) &= \{\text{använd regel 4}\}\\
V(\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}) &= \{\text{använd regel 1}\}\\
V(\mathbf{e}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}) + V(\mathbf{f}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}) + V(\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}) &= \{\text{använd regel 4}\}\\
V(\mathbf{g}, -2\mathbf{f}, 2\mathbf{e}) &= \{\text{använd regel 2}\}\\
-4V(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \mathbf{e}) &
\end{aligned}
$$

Vi är inte intresserade av vilket tecken volymen har, så vi kan stryka minustecknet. Vi vet från uppgiften att $V(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \mathbf{e}) = 2$, så volymen som sökes är $4\cdot 2 = 8$ volymenheter. □

Problem 36. *Visa att* $(3\mathbf{u}+2\mathbf{v})\times(5\mathbf{u}+4\mathbf{v}) = 2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *givet att* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är vektorer i* $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Jag ställer upp första vektorprodukten som en determinant, där $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Koordinaterna är angivna i standardbasen, vilket är ett krav för att vektorprodukten skall kunna räknas ut på detta sätt:

$$
(3\mathbf{u}+2\mathbf{v})\times(5\mathbf{u}+4\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 3u_1+2v_1 & 3u_2+2v_2 & 3u_3+2v_3\\ 5u_1+4v_1 & 5u_2+4v_2 & 5u_3+4v_3\\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}
$$

Detta kan tolkas som en volym, och vi kan alltså använda oss av lagarna för volymfunktionen. Från volymfunktionens lagar kan vi få fram att

$$V(u,v,w) = 0 + V(u,v,w) = \lambda V(v,v,w) + V(u,v,w) = V(u+\lambda v, v, w)$$

Detta innebär att vi kan addera en multipel av en rad till en annan i en determinant, utan att ändra determinantens värde. Detta är precis vad vi skall göra, vi adderar -1 gånger första raden till den andra raden, och har alltså att

$$\begin{vmatrix} 3u_1+2v_1 & 3u_2+2v_2 & 3u_3+2v_3 \\ 5u_1+4v_1 & 5u_2+4v_2 & 5u_3+4v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u_1+2v_1 & 3u_2+2v_2 & 3u_3+2v_3 \\ 2u_1+2v_1 & 2u_2+2v_2 & 2u_3+2v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

Regel 2 för volymfunktionen säger nu att vi kan bryta ut konstanter ur en rad. Vi bryter ut 2 ur mittenraden, och får sedan genom att addera -2 gånger andra raden till första raden att

$$2\begin{vmatrix} 3u_1+2v_1 & 3u_2+2v_2 & 3u_3+2v_3 \\ u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar sedan rad 1 från rad 2, och kan då till sist dra slutsatsen att

$$\begin{aligned} (3\mathbf{u}+2\mathbf{v}) \times (5\mathbf{u}+4\mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} 3u_1+2v_1 & 3u_2+2v_2 & 3u_3+2v_3 \\ 5u_1+4v_1 & 5u_2+4v_2 & 5u_3+4v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Vi har nu bevisat att $(3\mathbf{u}+2\mathbf{v}) \times (5\mathbf{u}+4\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. □

8. Räta linjer och planets ekvation

Problem 37. *Beräkna avståndet mellan punkten* $P = (1,2,3)$ *och linjen* L *som ges av* $(1,0,0) + t(4,2,1)$, $t \in \mathbb{R}$. *(ON-system).*

Lösning. Det finns en punkt P' som ligger på L och är närmast P. Det gäller att avståndet är minimalt om vektorn PP' är vinkelrät mot linjens riktningsvektor. P' är ju $(1,0,0)+t(4,2,1)$ för något t, och vektorn PP' är då $(1,0,0)+t(4,2,1)-(1,2,3) = (4t, 2t-2, t-3)$. Denna vektor skall vara vinkelrät mot $(1,2,4)$ som är linjens riktningsvektor. Vi vill alltså lösa $(4t, 2t-2, t-3)\cdot(4,2,1) = 0$. Skalärprodukten beräknas till $(4t)\cdot 4 + (2t-2)\cdot 2 + (t-3)\cdot 1$ eftersom vi är i ett ON-system. Förenkling av detta ger oss $21t - 7 = 0$ så $t = 1/3$. Vi sätter in detta värde i uttrycket för vektorn PP' och får att $PP' = (4/3, 2/3-2, 1/3-3) = 1/3\cdot(4,-4,-8)$. Vi beräknar nu längden av $|PP'|$:

$$|PP'| = \frac{1}{3}\sqrt{4^2+4^2+8^2} = \frac{\sqrt{96}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

som är det sökta avståndet. □

Problem 38. *Bestäm avståndet mellan punkten* $(1,2,4)$ *och planet* Π *som har ekvationen* $2x - y + 3z - 5 = 0$. *(ON-system).*

Lösning. Planets normal, $\mathbf{n}$ är $(2,-1,3)$ och vi får kortaste avståndet från planet till punkten genom att följa normalen. Vi söker då efter ett t så att punkten $(1,2,4)+t(2,-1,3) = (1+2t, 2-t, 4+3t)$ ligger i planet. Vi stoppar in detta i planets ekvation och får

$$\begin{aligned} 2(1+2t)-(2-t)+3(4+3t)-5=0 &\iff \\ 2+4t-2+t+12+9t-5=0 &\iff \\ 14+7t=0 &\iff \\ t=-1/2 & \end{aligned}$$

Vi måste alltså gå med vektorn $-1/2(2,-1,3)$ från $(1,2,4)$ för att hamna i planet. Det återstår då att beräkna längden på denna vektor:

$$\left|-\frac{1}{2}(2,-1,3)\right| = \frac{1}{2}|(2,-1,3)| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Detta är det sökta avståndet. □

Problem 39. *Bestäm avståndet mellan linjen* $(1,2,4)+t(1,2,-1)$ *och planet* Π *som har ekvationen* $2x+y+4z+1=0$. *(ON-system).*

Lösning. Eftersom $(1,2,-1)\cdot(2,1,4) = 2+2-4 = 0$ så är linjens riktningsvektor och planets normal vinkelräta. Alltså är linjen parallell med planet, och alla punkter på linjen ligger lika långt från planet. Det räcker alltså att beräkna avståndet från en godtycklig punkt på linjen och planet. Vi väljer $(1,2,4)$. Kortaste avståndet får vi om vi följer normalen, så man söker nu $t\in\mathbb{R}$ så att punkten $(1,2,4)+t(2,1,4)$ ligger i planet. Stoppar vi in detta i planets ekvation fås

$$\begin{aligned} 2(1+2t)+(2+t)+4(4+4t)+1 &= 0 \iff \\ 2+4t+2+t+16+16t+1 &= 0 \iff \\ 21+21t &= 0 \iff \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Avståndet är då $|-1(2,1,4)| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} = \sqrt{21}$. □

Problem 40. *Ett plan har normalen* $(1,2,-4)$ *och innehåller punkten* $(0,1,1)$. *Bestäm planets ekvation. (ON-system)*

Lösning. Enligt [Ten05, Sats 6.4] är vektorn (A,B,C) en normal till planet med ekvationen $Ax+By+Cz+D=0$. Alltså är planets ekvation $x+2y-4z+D=0$ för en konstant D. Nu använder vi oss av att $(0,1,1)$ skall ligga i planet. Det innebär att $x=0, y=1, z=1$ skall uppfylla planets ekvation. Vi sätter in detta och får

$$0+2-4+D=0 \iff D=2.$$

Planets ekvation är alltså $x+2y-4z+2=0$. □

Problem 41. *Finn den linje som ligger i de båda planen* $\Pi_1 = x+2y-z=1$ *och* $\Pi_2 = 2x-y+z=2$.

Lösning. Vi vill hitta de punkter som ligger i båda planen, så vi vill hitta punkter (x,y,z) som uppfyller båda ekvationerna.

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

Detta system skriver vi på matrisform och får genom gausselimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Vi fortsätter eliminera och får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Eftersom kolonnen som motsvarar z inte är en enhetskolonn väljer vi denna som parameter. För att slippa nämnare, så sätter vi $z = 5t$. Vi får då att $x = 1 - t$ samt $y = 3t$. Sammanställer vi detta får vi

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + 3t \\ z = 0 + 5t \end{cases}$$

Skärningslinjen mellan planen ges då av $(1, 0, 0) + t(-1, 3, 5)$. Vi kan kontrollera att vi gjort rätt genom att sätta in dessa värden i Π_1 :

$$(\underbrace{1-t}_{x}) + 2(\underbrace{3t}_{y}) - \underbrace{5t}_{z} = 1 \iff 1 - t + 6t - 5t = 1 \iff 1 = 1$$

Detta visar att linjen ligger i Π_1. På samma sätt kan vi kontrollera att linjen också ligger i Π_2. □

Problem 42. *Finn planet* Π *som innehåller linjen* $(1, 0, 1) + t(2, 3, -1)$ *och punkten* $(1, 2, -3)$.

Lösning. Sätter vi $t = 0$ och $t = 1$ så har vi att punkterna $(1, 0, 1)$ och $(3, 3, 0)$ ligger på linjen, och då också i planet. Vi har då sammanlagt tre punkter som ligger i planet, och de ligger inte på samma linje. Låt nu ekvationen för Π vara $Ax + By + Cz + D = 0$. Då måste de tre punkterna uppfylla planets ekvation:

$$\begin{cases} A + C + D &= 0 \\ 3A + 3B + D &= 0 \\ A + 2B - 3C + D &= 0 \end{cases}$$

Detta system skriver vi upp på matrisform och gausseliminerar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Vi är bara intresserade av en lösning, så vi väljer $D = 3$, för att slippa nämnare. Vi får då att $A = -5$, $B = 4$ och $C = 2$. Ekvationen för Π blir då $-5x + 4y + 2z + 3 = 0$. □

Problem 43. *Finn planet* Π *som innehåller punkterna* $(-2, 0, 1)$ *och* $(1, 0, 2)$ *och är vinkelrätt mot planet* $x + y + z - 1 = 0$. *(ON-system).*

Lösning. Vi låter ekvationen för Π_1 vara $Ax + By + Cz + D = 0$. Detta plan har då normalvektorn (A, B, C). Om Π_1 är vinkelrätt mot planet $x + y + z - 1 = 0$, så måste även planens normaler vara vinkelräta. Detta innebär att skalärprodukten av normalvektorerna är 0. Alltså gäller

$$(A, B, C) \cdot (1, 1, 1) = 0$$
$$\iff$$
$$A + B + C = 0$$

Det gäller också att de två givna punkterna skall uppfylla planets ekvation. Alltså gäller också de två följande ekvationerna

$$\begin{aligned} -2A + C + D &= 0 \\ A + 2C + D &= 0. \end{aligned}$$

Alla dessa ekvationer ger ett system som vi löser.

$$\begin{cases} A + B + C & = 0 \\ -2A + C + D & = 0 \\ A + 2C + D & = 0 \end{cases}$$

Detta ställer vi upp på matrisform och gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right) \implies \begin{cases} C & = & -\frac{3D}{5} \\ B & = & \frac{2D}{5} \\ A & = & \frac{D}{5} \end{cases}$$

Det är inte konstigt att vi fått ett underbestämt system: om $Ax+By+Cz+D = 0$ är ekvationen för ett plan, så kan vi multiplicera båda sidor med valfri nollskild konstant, och fortfarande ha en ekvation för samma plan. Om vi väljer $D = 5$, så slipper vi nämnare. Detta ger oss att $A = 1$, $B = 2$ och $C = -3$. Ekvationen för Π_1 blir då

$$x + 2y - 3z + 5 = 0.$$

□

Problem* 8.1. *(2009-08-17:5) En linje l parametriseras av $(1, 2, 3) + t(1, 0, -1)$. Skriv vektorn $\mathbf{u} = (6, 4, 2)$ som $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1$ är parallell med l och $\mathbf{u}_2$ är vinkelrät mot l. (ON-system)*

Lösning. Det är klart att $\mathbf{u}_1 = s_1(1, 0, -1)$ eftersom $(1, 0, -1)$ är riktningsvektorn för l. Vektorn $\mathbf{u}_2$ måste ligga i det plan som är vinkelrätt mot $(1, 0, -1)$. Detta plan spänns då upp av vektorerna $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 0)$ eftersom båda dessa är vinkelräta mot $(1, 0, -1)$. Därför kan vi skriva $\mathbf{u}_2 = s_2(1, 0, 1) + s_3(0, 1, 0)$, och alla vektorer på den här formen är vinkelräta mot l.

Vi söker nu s_1, s_2 och s_3 så att

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \iff (6, 4, 2) = s_1(1, 0, -1) + s_2(1, 0, 1) + s_3(0, 1, 0).$$

Detta ger oss ett linjärt ekvationssystem, med tre obekanta och tre ekvationer:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 & = 6 \\ s_3 & = 4 \\ -s_1 + s_2 & = 2 \end{cases}$$

Vi får att $s_1 = 2, s_2 = s_3 = 4$. Slutligen är $\mathbf{u}_1 = 2 \cdot (1, 0, -1) = (2, 0, -2)$ och $\mathbf{u}_2 = 4 \cdot (1, 0, 1) + 4 \cdot (0, 1, 0) = (4, 4, 4)$. □

9. Linjära avbildningar

Problem 44. *Linjen L som ges av $(1, 2, 3) + t(2, -1, 3)$ speglas i planet $\Pi : x + y + 2z = 0$ och avbildas på L'. Bestäm L'. (ON-system)*

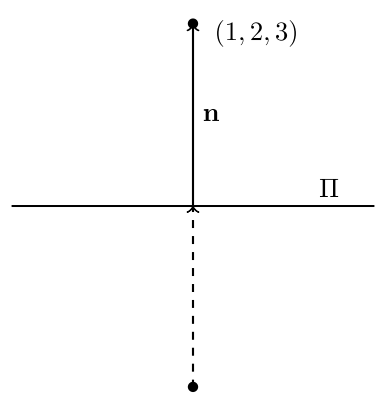
Lösning. Först bestämmer vi linjens skärning med planet, eftersom denna punkt avbildas på sig själv under spegling. Varje punkt på linjen kan skrivas på formen $(1, 2, 3) + t(2, -1, 3)$ för något $t \in \mathbb{R}$, så vi sätter in detta i planets ekvation och löser ut det t som uppfyller ekvationen.

$$\begin{aligned} (1 + 2t) + (2 - t) + 2(3 - 3t) = 0 &\iff \\ 9 + 7t = 0 &\iff \\ t = -\frac{9}{7} & \end{aligned}$$

Vi sätter in detta värde i linjens ekvation för att då få den punkt som avbildas på sig själv:

$$\left(1 - 2 \cdot \frac{9}{7}, 2 + \frac{9}{7}, 3 - 3 \cdot \frac{9}{7}\right) = \left(-\frac{11}{7}, \frac{23}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

Vi behöver nu bara en punkt till på L' eftersom vi då vet allt för att bestämma L'. Vi väljer då en godtycklig punkt på L och speglar i planet, t.ex. punkten $(1, 2, 3)$, som ligger på L. Vi vandrar nu från $(1, 2, 3)$ längs planets normal tills vi hamnar i planet. Därefter går vi i samma riktning lika långt igen, se Figur 4. Vi vill alltså



Figur 4. Spegling i ett plan.

först hitta s så att $(1, 2, 3) + s(1, 1, 2)$ ligger i planet. Vi sätter in uttrycket i planets ekvation:

$$\begin{aligned}(1+s)+(2+s)+2(3+s)=0 &\iff \\ 9+6s=0 &\iff \\ s=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Vi behöver alltså $-3/2$ av $(1,1,2)$ för att ta oss från $(1,2,3)$ till Π, och då behöver vi dubbelt så mycket för att ta oss till spegelbilden. Spegelbilden blir då $(1,2,3)-3\cdot(1,1,2)=(-2,-1,-3)$. Vi har nu två punkter på linjen L' och vi kan då lätt beräkna riktningsvektorn för denna linje genom att ta skillnaden mellan punkternas koordinater:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{11}{7},\frac{23}{7},\frac{-6}{7}\right)-(-2,-1,-3) &= \left(2-\frac{11}{7},1+\frac{23}{7},3-\frac{6}{7}\right)\\ &= \left(\frac{3}{7},\frac{30}{7},\frac{15}{7}\right)\\ &= \frac{3}{7}(1,10,5)\end{aligned}$$

Vi kan multiplicera denna riktningsvektor med valfri nollskild konstant, eftersom den då fortfarande pekar i samma riktning. Speglingen av L i planet Π ges då av $(-2,-1,-3)+t\cdot(1,10,5)$. □

Problem 45. *Finn matrisen för den linjära transformation $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ där T avbildar punken $(0,0,1)$ på $(0,2,0)$, punkten $(0,2,0)$ på $(4,0,0)$ och $(4,0,0)$ på $(0,0,1)$. Beskriv T med ord och bestäm sedan T^3. (ON-system)*

Lösning. Vi använder de linjära egenskaperna T har och får att

$$\begin{aligned}T((4,0,0)) &= (0,0,1) \iff\\ 4T((1,0,0)) &= (0,0,1) \iff\\ T((1,0,0)) &= (0,0,\frac{1}{4})\end{aligned}$$

På samma sätt finner vi att

$$\begin{aligned}T((0,2,0)) &= (4,0,0) \iff\\ 2T((0,1,0)) &= (4,0,0) \iff\\ T((0,1,0)) &= (2,0,0)\end{aligned}$$

Vi vet nu var de tre basvektorerna $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ avbildas. Vi kan då bestämma matrisen för T genom att ställa upp bilderna av basvektorerna som kolonnvektorer i matrisen.

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vi ser att T byter plats på axlarna som spänns upp av $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$. T förstorar i två riktningar och förminskar i den tredje. Det är klart att $T^3=E$, eftersom de tre linjärt oberoende vektorerna $(0,0,1)$, $(0,2,0)$ och $(4,0,0)$ avbildas på sig själva under T^3. Således måste alla vektorer avbildas på sig själva, och vi får identitetsavbildningen E. □

Problem 46. *Finn den linjära transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller $T((1,0,1)) = (0,0,1)$, $T((1,0,-1)) = (1,1,1)$ och $T((0,1,0)) = (1,1,0)$. Bestäm sedan de vektorer $\mathbf{v}$ som uppfyller att $T(\mathbf{v}) = 0$. (ON-system)*

Lösning. Vi använder de linjära egenskaperna som T har för att ta reda på var basvektorerna avbildas, eftersom det entydigt bestämmer avbildningsmatrisen. Det vi gör är en slags gausselimination:

$$\begin{aligned}
T((1,0,1)) + T((1,0,-1)) &= (0,0,1) + (1,1,1) \iff \\
T((1,0,1) + (1,0,-1)) &= (1,1,2) \iff \\
T((2,0,0)) &= (1,1,2) \iff \\
2T((1,0,0)) &= (1,1,2) \iff \\
T((1,0,0)) &= \frac{1}{2}(1,1,2)
\end{aligned}$$

Vi vet nu var $(1,0,0)$ avbildas. Med samma metod får vi att

$$\begin{aligned}
T((1,0,1)) - T((1,0,-1)) &= (0,0,1) - (1,1,1) \iff \\
T((0,0,2)) &= (-1,-1,0) \iff \\
T((0,0,1)) &= \frac{1}{2}(-1,-1,0)
\end{aligned}$$

Från uppgiften vet vi var $(0,1,0)$ avbildas. Avbildningsmatrisen för T har då bilderna av basvektorerna som kolumner:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Första delen av uppgiften är nu löst.

För att lösa den andra delen så använder vi ett ekvationssystem. Låt $\mathbf{v} = (x,y,z)$. Vi vill hitta de (x,y,z) så att

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utför vi matrismultiplikationen innebär detta att

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} &= 0 \\ \frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

Här ser vi direkt att $x = 0$ och då måste $y - \frac{z}{2} = 0$. Om vi låter $z = 2t$, så måste då $y = t$. De vektorerna som avbildas på 0 är då $\mathbf{v} = (x,y,z) = (0,t,2t)$ där $t \in \mathbb{R}$. □

Problem 47. *Bestäm matrisen för den avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som först avbildar $\mathbf{v}$ på $\mathbf{v} \times (1,0,2)$ och därefter roterar 90° runt $y-$axeln. (ON-system)*

Lösning. Vi låter $\mathbf{v} = (x,y,z)$ och beräknar vektorprodukten[3] $(x,y,z) \times (1,0,2)$.

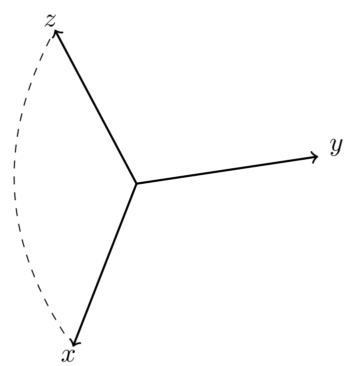
$$(x,y,z) \times (1,0,2) = \left(\begin{vmatrix} y & 0 \\ z & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & 1 \\ z & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix} \right) = (2y, z - 2x, -y)$$

[3] [Ten05, Sats 5.3]

Vi kan nu enkelt bestämma matrisen S som avbildar (x, y, z) på $(2y, z-2x, -y)$. Första raden i matrisen skall ju ge $x-$koordinaten för bildvektorn, så första raden skall skicka (x, y, z) på $2y$ så den första raden måste vara $(0, 2, 0)$. Samma resonemang för de andra två koordinaterna ger att

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Denna matris avbildar alltså (x, y, z) på $(2y, z-2x, -y)$. Kontrollera detta.



FIGUR 5. Rotation moturs kring y-axeln

Vi vill nu ta reda på hur matrisen R för rotation $90°$ kring $y-$axeln ser ut. Istället för att försöka komma ihåg formeln för allmäna rotationer så funderar vi på var basvektorerna avbildas. Rotation innebär att man roterar moturs kring en vektor som pekar mot betraktaren. Vi ser från figur 5 att $z-$axeln kommer att hamna på $x-$axeln, och $x-$axeln hamnar på den negativa $z-$axeln. $y-$axeln avbildas givetvis på sig själv. Slutsatsen är att

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

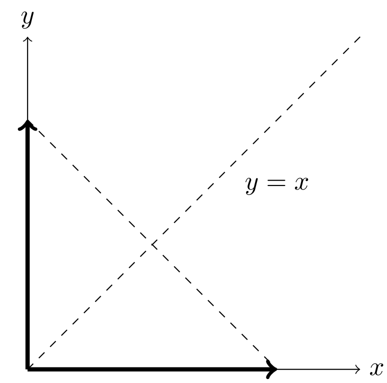
(Kontroll: Vektorn $(1, 0, 0)$ avbildas på $(0, 0, -1)$ så $x-$axeln hamnar på negativa $z-$axeln.) För att hitta matrisen för T, så multiplicerar vi samman de två matriserna, matrisen för rotation till vänster då denna avbildning är sist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Problem 48. *En kub med volymen 5 v.e avbildas under $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som först speglar i planet $x = y$ och därefter förstorar längs $x-$axeln. Den resulterande kroppen har volymen 10 v.e. Bestäm matrisen för avbildningen.*

Lösning. Matrisen för speglingen hittar vi lättast genom att rita en bild, som i Figur 6. Speglingen avbildar $z-$axeln på sig själv, men x-axeln avbildas på y-axeln



FIGUR 6. Spegling i planet $y = x$.

och tvärt om. Matrisen blir då

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu återstår förstorningen. Eftersom spegling inte ändrar volymen, så måste förstorningen längs $x-$axeln stå för all förstorning. Den måste dubblera volymen eftersom kubens volym fördubblas. Alltså ser förstorningsmatrisen ut så här:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen för T blir då

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Problem 49. *Man kan betrakta alla polynom av grad max* 2 *som ett vektorrum, där* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *mostsvarar vektorn* (a, b, c), $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Bestäm matrisen som motsvarar avbildningen* $\hat{T} : p(x) \mapsto p(x) + p'(x)$. *Har avbildningen en invers?*

Lösning. Polynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ avbildas via $\hat{T}$ på $ax^2 + bx + c + D[ax^2 + bx + c] = ax^2 + (2a + b)x + (b + c)$. Om vi kallar motsvarande avbildning på vektorer för T, så ser vi att $T((a, b, c)) = (a, 2a + b, b + c)$. Bilderna av enhetsvektorerna blir då kolonnerna i vår avbildningsmatris. $T((1, 0, 0)) = (1, 2, 0)$, $T((0, 1, 0)) = (0, 1, 1)$ samt $T((0, 0, 1)) = (0, 0, 1)$. Matrisen för T blir då

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen har determinant 1, och är därför inverterbar. Detta medför att $\hat{T}$ har invers. □

10. Teorifrågor

Tanken med det här kaplitlet är att ge en bättre teoretisk förståelse för linjär algebra. Om frågorna kräver uträkningar, så kan alla dessa göras med huvudräkning.

Problem 50. *Två vektorer* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *är linjärt oberoende. Om du vet att* $a\mathbf{u} = b\mathbf{v}$, *vad kan du säga om talen* a *och* b*?*

Lösning. Två vektorer är linjärt oberoende om den enda lösningen till systemet $a\mathbf{u} = b\mathbf{v}$ är $a = b = 0$, så talen a, b måste båda vara 0. □

Problem 51. *Du har ett linjärt ekvationssystem med fem ekvationer och tre obekanta variabler. Vilka möjliga antal lösningar kan du få från ekvationssystemet?*

Lösning. Systemet har fler ekvationer än variabler, så det kan hända att systemet saknar lösningar. Vissa ekvationer kan dock efter gausselimination bli lika, så det kan också hända att vi får en unik lösning, eller rent utav, oändligt många lösningar med en eller två parametrar. □

Problem 52. *Du har ett linjärt ekvationssystem*

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad\;\, x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \end{cases}$$

där $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ *och* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *är ekvationssystemets variabler och* $n > 3$. *Hur många lösningar har ekvationssystemet?*

Lösning. Vi kan gausseliminera, så att de tre första kolonnerna blir enhetskolonner. De övriga $n - 3$ kolonnerna kommer motsvara de variabler som vi parametriserar med. Detta ger oss oändligt många lösningar, med $n - 3$ paramterar. □

Problem 53. *Förklara varför* $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lösning. Uttrycket $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ beskriver volymen av den kropp som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. I uttrycket ingår bara vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, och volymen av den kropp dessa spänner upp måste då vara 0. □

Problem 54. *Visa att* $\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ *är vinkelrät mot* $\mathbf{v}$, *för godtyckliga vektorer* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Lösning. Vi har att

$$\left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

och vi vet att om $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0$ så är $\mathbf{w}$ och $\mathbf{v}$ vinkelräta. Alltså är $\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$. □

Problem 55. *Stämmer det att ekvationen* $x + y = 2$ *kan beskriva både ett plan och en linje?*

Lösning. Ja, det beskriver en linje i $\mathbb{R}^2$ och ett plan i $\mathbb{R}^3$. □

Problem 56. *Du har två ekvationer för två plan. På vilka sätt kan snittet av dessa plan se ut?*

Lösning. Det finns tre fall som kan inträffa:

(1) Planen är inte parallella och de skär i en linje.
(2) Planen är parallella och de skär inte alls.
(3) Planen är lika, och skärningen är detta plan.

□

Problem 57. *En linjär avbildning från* $\mathbb{R}^3$ *till* $\mathbb{R}^3$ *består av en rotation, en förstorning med faktor 2 längs alla axlar, en projektion, samt till sist ännu en rotation.*

(1) *Vad är determinanten på den matris som representerar den sammansatta avbildningen?*
(2) *Vad är determinanten på matrisen om man inte har med projektionen?*

Lösning. Att sammansätta matrisavbildningar är samma som att utföra matrismultiplikation. Determinanten av sammansättningen är då produkten av determinanterna av de enskila matriserna i sammansättningen. En projektion har determinant 0, så alltså måste hela avbildningen ha determinant 0.

Om projektionen inte ingår, så är determinanten 8. Rotationer har determinant 1, men förstorar vi med faktor två längs en axel, så innebär det en dubblering av volymen. Förstorar vi då längs alla tre axlar blir volymen 8 gånger större, och determinanten måste då vara 8. □

Problem 58. *Du vet två vektorer som spänner upp ett plan i* $\mathbb{R}^3$. *Hur hittar du lättast planets normal?*

Lösning. Jag vill ha en vektor som är vinkelrät mot planet och då också vinkelrät mot de två givna vektorerna. Planets normalvektor ges då t.ex. av de två vektorernas kryssprodukt. □

Problem 59. *Du har ett plan och en linje i rummet. Linjen har riktningsvektorn* $(1, 2, 3)$ *och planets normal är* $(1, 1, -2)$. *Vad är avståndet mellan linjen och planet? (ON-system)*

Lösning. Det kan tyckas som om vi vet alldeles för lite om planet och linjen för att bestämma något, men vi ser att $(1, 2, 3) \cdot (1, 1, -2) = -3 \neq 0$ så planets normal och linjen är inte vinkelräta. Då kan planet och linjen ej vara parallella, så de måste skära i en punkt. Där är avståndet 0, så avståndet mellan planet och linjen är 0. □

Problem 60. *En linje genom origo har riktningsvektorn* $(1, 0, 0)$. *Bestäm kortaste avståndet från linjen till punkten* $(100, 3, 4)$. *(ON-system)*

Lösning. Alla punkter på formen $(t, 0, 0)$ ligger på linjen. Vi vill minimera avståndet mellan linjen och punkten, som ges av $\sqrt{(t-100)^2 + 3^2 + 4^2}$ som uppenbart är minst om $t = 100$. Detta ger avståndet $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. □

Problem 61. *Ett plan genom punkten* $(1, 1, 1)$ *i* $\mathbb{R}^3$ *har normalen* $(1001, 603, -100) \times (653, 566, 1230)$. *Bestäm planet på parameterform. (ON-system)*

Lösning. Vi behöver två vektorer parallella med planet, dvs. två vektorer vinkelräta mot planets normal. Två sådana vektorer är $(1001, 603, -100)$ och $(653, 566, 1230)$, eftersom $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$. Nu kan vi bestämma planet på parameterform:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1001, 603, -100) + t(653, 566, 1230).$$

□

11. Appendix

11.1. **Räknelagarna för skalärprodukt.** Se [Ten05, Sats 4.1].
Följande gäller för godtyckliga vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ samt konstanter λ :

(1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
(2) $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
(3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
(4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

11.2. **Lagar för volymfunktionen.** Se [Ten05, Sats 5.6].

(1)
- $V(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w})$
- $V(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w})$
- $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}') = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}')$

(2) $V(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

(3)
$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = V(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) =$$
$$-V(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -V(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -V(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

(4) $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ om två av vektorerna är parallella.

Referenser

[Ten05] Anders Tengstrand. *Linjär algebra med vektorgeometri.* Studentlitteratur, 2 edition, 2005.

Email address: `per.w.alexandersson@gmail.com`